

Diferenciální počet vektorových polí

Několik důležitých vztahů z vektorové algebry a diferenciálního počtu.

Skalární součin vektorů: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Vektorový součin vektorů $\vec{A} \times \vec{B} = \text{vektor}$: $(A \times B)_x = A_y B_z - A_z B_y$

$$(A \times B)_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$(A \times B)_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

Pro vektorový součin platí:

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Pro funkci $f(x, y, z)$ platí:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Parciální derivace.

Nechť množina $M \subseteq \mathbb{R}^n, M \neq \emptyset$. Funkcí více proměnných rozumíme zobrazení

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Množina M se nazývá definiční D_f obor funkce f .

Parciální (částečnou) derivací funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i nazýváme limitu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Parciální derivace funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyšších řádů podle proměnné x_i nebo ostatních proměnných dostaneme dalším derivováním derivace podle příslušné proměnné. Například:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Obecně neplatí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Rovnost platí pouze, existují-li obě derivace a jsou-li si v bodě derivace rovny.

Diferenciál.

Budiž $f(x)$ funkce, x_0 je pevně zvolený bod. Přejdeme z bodu do jiného bodu $(x_0 + h)$, změní se funkce $f(x)$ o číslo $[f(x_0 + h) - f(x_0)]$. Otázka je, zda tento „přírůstek funkce“ je pro malé hodnoty $|h|$ přibližně úměrný číslu h , to je zda existuje číslo A tak, že rozdíl $[f(x_0 + h) - f(x_0)] - Ah$ je pro malé hodnoty podstatně menší než $|h|$. To je aby platilo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme lineární funkci $df(x_0) = Ah$ takovou, že pro funkci:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = o(h)$$

platí $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$.

Číslo A existuje tehdy, existuje-li vlastní derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Diferenciál píšeme zpravidla $df(x)$. a namísto h píšeme dx , potom:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Exaktní diferenciál.

Budiž dána funkce $f(x,y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Existují-li dvě čísla A, B tak, že funkce $\eta(h, k)$ definovaná rovnicí

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (Ah + Bk) + (|h| + |k|)\eta(h, k)$$

splňuje rovnici $\lim_{[h,k] \rightarrow [0,0]} \eta(h, k) = 0$.

pak funkci $(Ah + Bk)$ v proměnných h a k nazýváme **Exaktním (totálním) diferenciálem funkce** funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ totální diferenciál $(Ah + Bk)$ pak pro A a B platí

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Zobecnění pro funkci n proměnných $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, **exaktním (totálním) diferenciálem funkce** nazýváme součet

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Příklad.

Najděme přibližně hodnotu odmocniny $\sqrt{1,0001}$.

Řešení.

Uvažme funkci $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

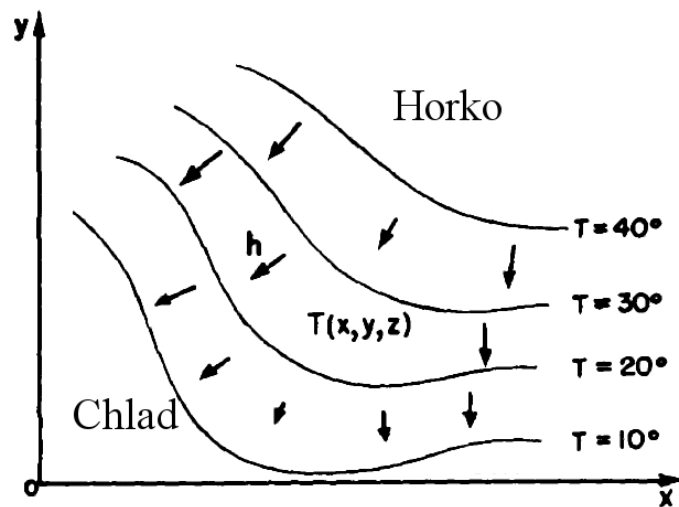
Potom můžeme psát $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

Dosadíme-li nyní $x = 0,0001$, dostaneme: $\sqrt{1,0001} \approx 1,00005$

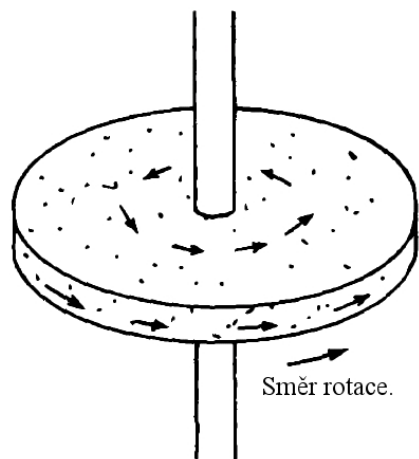
Skalární a vektorové pole.

Fyzikálním polem nazýváme zobrazení, které každému bodu prostoru přiřadí hodnotu fyzikální veličiny, popřípadě i směr a orientaci vektoru fyzikální veličiny.

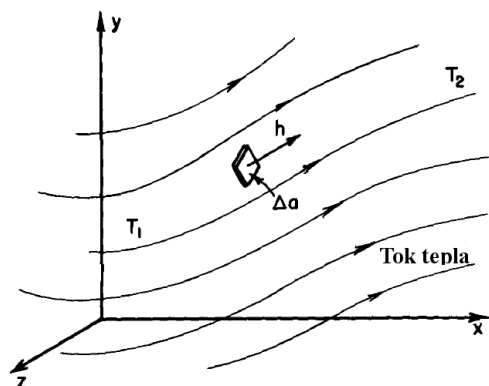
Skalárním polem chápeme pole, jež je v každém bodě prostoru charakterizováno pouze jedním číslem - **skalárem**.



Příkladem skalárního pole je těleso, které na některých místech zahříváme a na jiných chladíme. Teplota se v tělese mění místo od místa a je tak funkcí souřadnic x , y a z v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Funkce $T(x,y,z)$ přiřazuje každému bodu v tělese určitou hodnotu teploty a je skalárním polem. Dobrou představu o rozložení hodnot skalární veličiny v poli lze získat tak, že proložíme místy o stejné hodnotě skalární veličiny myšlené plochy, podobně jako vrstevnice na mapě. V příkladu teplotního pole na obrázku, kde je vynesena závislost teploty na x a y při $z = 0$. Plochy v případě na obrázkuy označujeme jako **izotermy**.

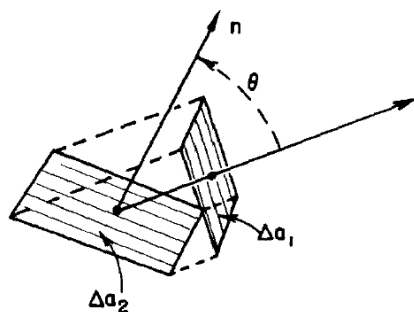


Vektorové pole, je zobrazení přiřazující každému bodu prostoru nejen číselnou hodnotu, ale též směr a orientace vektoru veličiny. Například rychlost atomů v rotujícím tělese jako na obrázku je vektorovým polem.



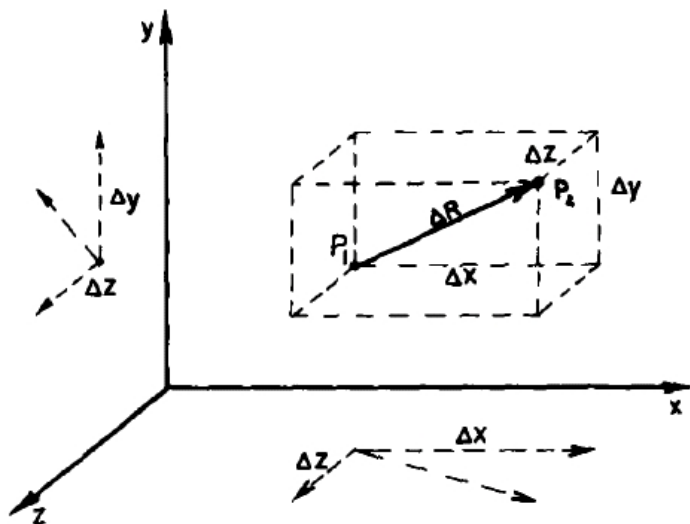
Vektorovým polem je též **hustota tepelného $\vec{h}$** toku mezi místy o různé teplotě. Hustota tepelného toku je definována jako množství tepelné energie ΔP , které projde za jednotku času jednotkovou plochou ΔS kolmou ve směru toku $\vec{e}_t$.

$$\vec{h} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \vec{e}_t$$



Obecně, je-li orientace plošky ke směru toku libovolná, pak je třeba uvažovat průmět plošky do roviny kolmé k toku $\vec{h} \cdot \vec{n}$ kde $\vec{n}$ je vektor normály k plošce.

První derivace polí - Gradient.



Vyberme v teplotním poli dva body P_1 a P_2 vzdálené Δr o různých teplotách T_1 a T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Ve zvoleném souřadnicové soustavě můžeme psát $T_1(x, y, z)$ a $T_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Kde Δx , Δy , Δz , jsou složky vektoru Δr . Vzhledem k platnosti vztahu:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Pro ΔT platí: $\Delta T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z$

Veličina ΔT na levé straně rovnice je skalár. Pravá strana je součet tří součinů, v nichž vystupují složky vektoru Δr . Ze srovnání se vztahem definující skalární součin vyplývá, že čísla

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

jsou složkami vektoru.

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

Pro tento vektor (nazývá se gradient, del, nabla) je zaveden symbol ∇ , je **diferenciálním operátorem**, jeho složky jsou první derivace podle jednotlivých proměnných.

$$\text{grad } T = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)$$

S použitím definice gradientu přepíšeme vztah pro ΔT do tvaru:

$$\Delta T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z \rightarrow \Delta T(x, y, z) = \nabla T \cdot \Delta \vec{r}$$

Při použití operátorů je třeba dávat pozor na pořadí činitelů: $T\nabla \neq \nabla T$

Tento vztah je stále operátorem, operátor je tak zvaně „**hladový**“.

$$T\nabla = T \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(T \frac{\partial}{\partial x}, T \frac{\partial}{\partial y}, T \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Tento vztah již není operátorem, operátor je „**nasycen**“.

$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

První derivace polí – Divergence vektoru.

Diferenciální operátor ∇ je vektorový operátor, to znamená, že ho lze skalárně nebo vektorově násobit.

Skalární součin $(\text{vektor}) \cdot \nabla$ nedává nic nového, operátor je pouze vynásoben vektorem, a zůstává stále operátorem.

Skalární součin $\nabla \cdot (\text{vektor } \vec{h})$ dává skalární pole:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \\ \nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \end{cases}$$

Součin $\nabla \cdot (\text{vektor})$ nazýváme divergence vektoru, často divergenci zapisujeme $\text{div } \mathbf{h}$.

Divergence vektoru je rovna toku vektoru plochou obepínající objem jednotkové velikosti v okolí

První derivace polí – Rotace vektoru.

Vektorový součin operátoru ∇ a vektoru dává opět dvě možné kombinace:

$$\nabla \times (\text{vektor}), (\text{vektor}) \times \nabla$$

Kombinace $(\text{vektor}) \times \nabla$ nedává nic nového, operátor ∇ zůstává stále nenasyčeným operátorem.

V kombinaci $\nabla \times (\text{vektor})$ působí operátor na vektor, výsledkem vektorového součinu operátoru ∇ na vektor je opět vektor. Operaci $\nabla \times (\text{vektor})$ nazýváme rotace vektoru. Často píšeme zkráceně **rot $\mathbf{h}$** . Složky vektoru **rotace $\mathbf{h}$** jsou dány vztahy:

$$\text{rot } \vec{h} = \nabla \times \vec{h} = \begin{cases} (\nabla \times \vec{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \\ (\nabla \times \vec{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \vec{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \end{cases}$$

Formálně můžeme rotaci vektoru zapsat ve formě determinantu matice:

$$\nabla \times \vec{h} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_x & h_y & h_z \end{pmatrix}$$

První derivace polí-shrnutí:

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{vektor}$$

$$\nabla \cdot \vec{h} = \text{div } \vec{h} = \text{skalár}$$

$$\nabla \times \vec{h} = \text{rot } \vec{h} = \text{vektor}$$

Druhé derivace vektorových polí.

Druhé derivace vektorových polí dávají následující kombinace:

1. $\nabla \times (\nabla T)$

Pro vektorový součin vektoru $\mathbf{A}$ a součinu vektoru $\mathbf{A}$ a skaláru T platí rovnice:

$$\vec{A} \times (\vec{A} T) = (\vec{A} \times \vec{A}) T = 0$$

Z platnosti vztahu $(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = 0$ vyplývá:

$$\nabla \times (\nabla T) = \text{rot}(\text{grad } T) = 0$$

Věta:

Platí-li rovnice $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, pak existuje takové ψ , že $\mathbf{A} = \nabla \psi$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla T) \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) \\ \nabla \cdot (\nabla T) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{h}) \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{h}) \end{array} \right.$$

2. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})$

Pro smíšený součin vektorů $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí rovnice: $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

Z platnosti vztahu $(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = 0$ vyplývá: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \text{div} \cdot (\text{rot } \vec{h}) = 0$

Věta:

Platí-li rovnice $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, pak existuje takové ψ , že $\mathbf{A} = \nabla \times \psi$.

3. $\nabla \cdot (\nabla T)$

Výraz $\nabla \cdot (\nabla T)$ je obecně různý od nuly. Složky gradientu skalárního pole T jsou:

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T)$$

Potom

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla_x (\nabla_x T) + \nabla_y (\nabla_y T) + \nabla_z (\nabla_z T) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Což je nějaké skalární pole.

Výraz $\nabla \cdot (\nabla T)$ zapíšeme jednodušeji zavedením nového operátoru namísto skalárního součinu $(\nabla \cdot \nabla)$. Tento operátor nazýváme **Laplaceův operátor** ∇^2 (v literatuře se často užívá i zápis Δ).

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Potom:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T$$

Laplaceův operátor je skalární operátor a tedy může působit i na vektor:

$$\nabla^2 \vec{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z)$$

4. $\nabla \times (\nabla \times \vec{h})$

Z vektorové identity: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) =$
 $= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Vyplývá:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{h} = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h}$$

5. $\nabla(\nabla \cdot \vec{h})$

Tato kombinace dává nějaké přípustné vektorové pole.

Druhé derivace vektorových polí – Shrnutí.

$$\nabla \times (\nabla T) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{skalární pole.}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{h}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h}$$

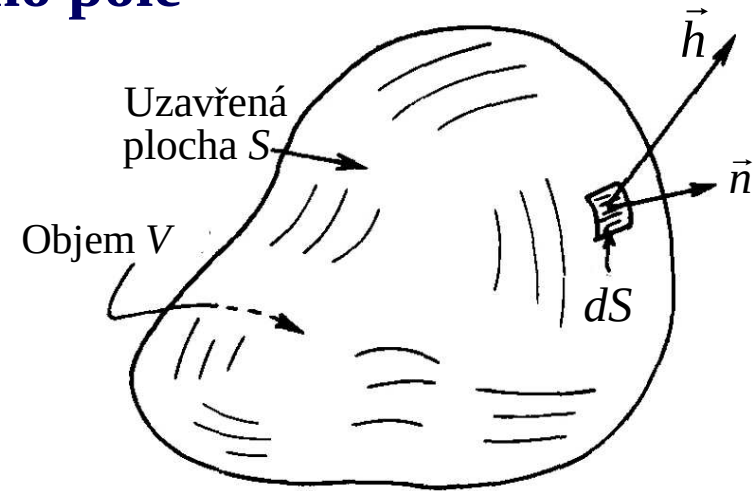
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{h}) = \text{vektorové pole.}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \vec{h}) = \nabla^2 \vec{h} = \text{vektorové pole.}$$

Integrální počet vektorových polí.

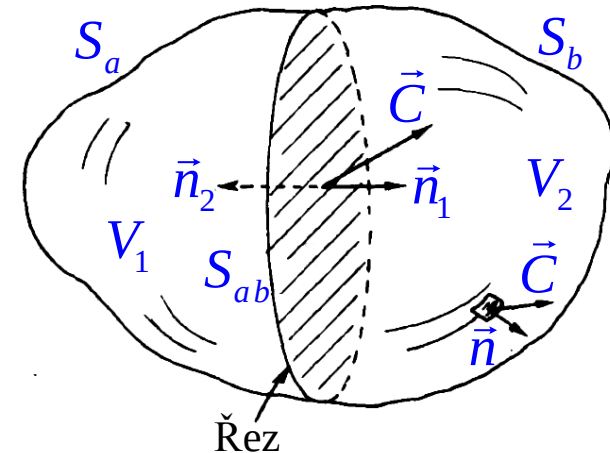
1. Tok vektorového pole

Předpokládejme, že máme zdroj tepla uvnitř tělesa, jehož objem V ohraničuje plocha velikosti S . Tok tepla elementem plošky dS je dán součinem normálové složky vektoru hustoty tepla $\vec{h}_n = \vec{h} \cdot \vec{n}$ a elementu plošky dS .

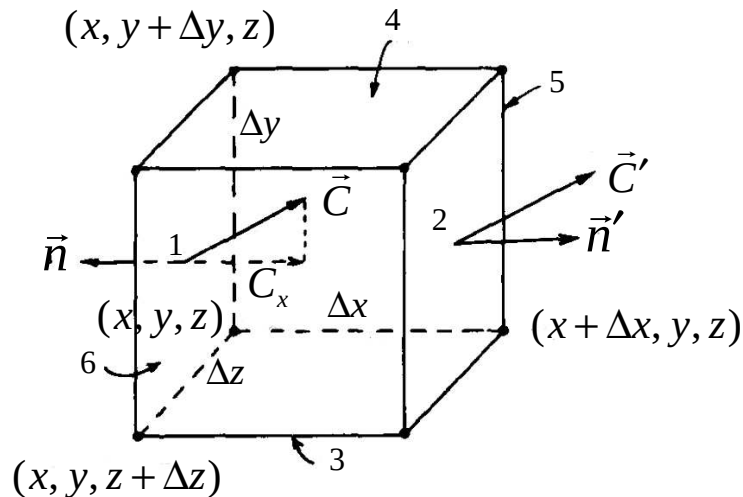


$$\text{Celkový tepelný tok plochou } S = \oint_S \vec{h} \cdot \vec{n} dS$$

Tok vektorového pole je **aditivní**, to znamená, že rozdělíme-li objem V na části o objemech V_1 a V_2 , pak tok vektoru plochou S ohraničující celkový objem V je dán součtem toků plochami $S_1 = S_a + S_{ab}$ a $S_2 = S_b + S_{ab}$ ohraničujícími objemy V_1 a V_2 .



Tok povrchem krychle – Gaussova věta



$$\text{Tok z plochy 1} = -C_x(1)\Delta y\Delta z$$

$$\text{Tok z plochy 2} = C_x(2)\Delta y\Delta z$$

$C_x(1)$ se od $C_x(2)$ se obecně trochu liší, pro dostatečně malá Δx můžeme pro $C_x(2)$ psát:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x$$

$$\text{Pak vektoru tok z plochy 2} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

$$\text{Tok plochami 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{Tok plochami 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{Tok plochami 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Celkový tok povrchem krychle:

$$\int \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Součet derivací v závorce je $\nabla \cdot \vec{C}$, potom pro infinitezimální krychli:

$$\int \vec{C} \cdot \vec{n} dS = (\nabla \cdot \vec{C}) \Delta V$$

Tok vektoru povrchem infinitezimální krychle je tedy roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. **Divergence vektoru v daném bodě je rovna toku vektoru připadajícímu na jednotkový objem v okolí daného bodu.**

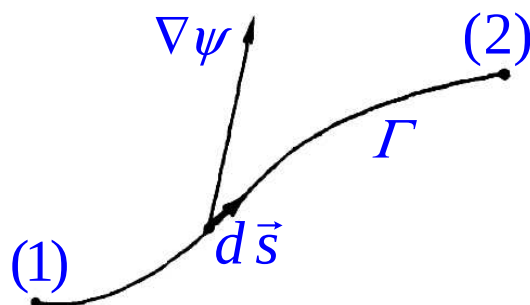
Gaussova věta:

Máme-li konečný objem, pak vzhledem k platnosti aditivity toku vektoru, můžeme divergenci integrovat přes celý objem tělesa.

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{C}) dV$$

kde S je libovolná uzavřená plocha obepínající objem V .

Křivkový integrál $\nabla \psi$

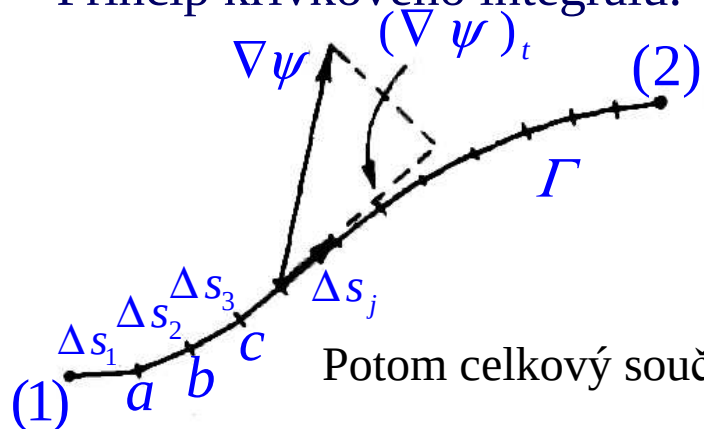


Mějme skalární pole $\psi(x,y,z)$, hodnoty v bodech o souřadnicích (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) jsou $\psi(x_1, y_1, z_1)$ a $\psi(x_2, y_2, z_2)$ (zkráceně $\psi(1)$ a $\psi(2)$). Pak je-li Γ nějaká křivka spojující body $\psi(1)$ a $\psi(2)$ platí:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\Gamma: 1 \rightarrow 2} (\nabla \psi) \cdot d\vec{s}$$

Tento typ křivkového integrálu označujeme jako **křivkový integrál druhého druhu**.

Princip křivkového integrálu.



$$\Delta \psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla \psi)_1 \cdot \Delta s_1$$

$$\Delta \psi_2 = \psi(b) - \psi(a) = (\nabla \psi)_2 \cdot \Delta s_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta \psi_n = \psi(2) - \psi(n-1) = (\nabla \psi)_n \cdot \Delta s_n$$

Potom celkový součet dostaneme:
$$\psi(2) - \psi(1) = \sum_i \Delta \psi_i = \sum_i (\nabla \psi)_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$

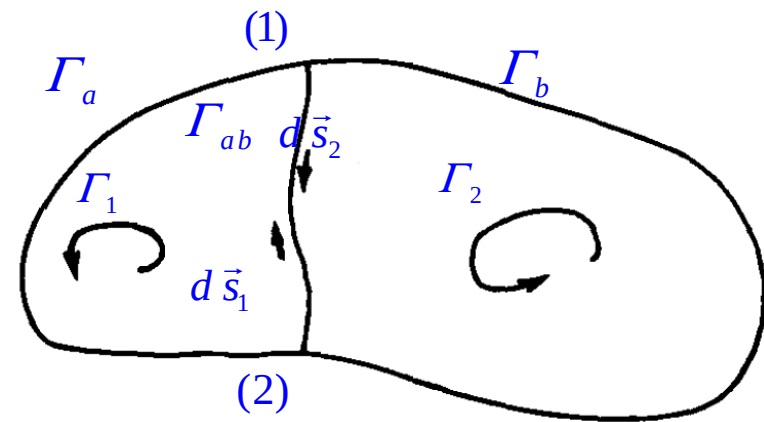
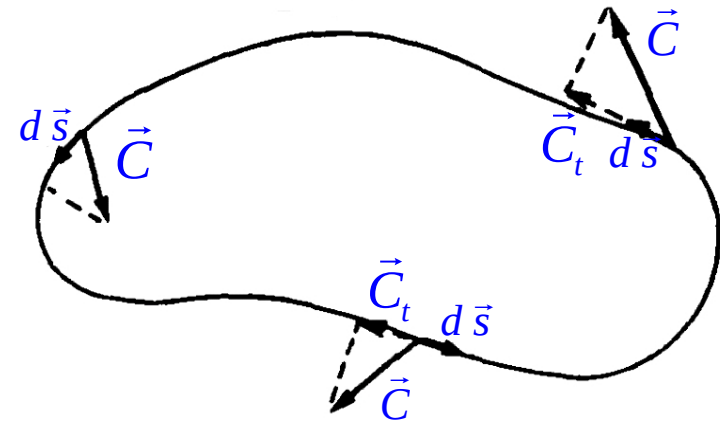
Limita součtů pro největší z $\Delta s_i \rightarrow 0$ pak je křivkovým integrálem.

Cirkulace vektorového pole.

Je-li $\vec{C}$ nějaké vektorové pole, pak cirkulací vektoru nazýváme křivkový integrál po uzavřené křivce ze složky vektoru tečné ke křivce.

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s}$$

Cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce je aditivní. Rozdělme uzavřenou křivku na dvě uzavřené křivky Γ_1 Γ_2 tak, že spojíme dvě místa na křivce (1) a (2) čarou. Křivka Γ_1 je vytvořena z části původní křivky Γ_a a čáry Γ_{ab} spojující body (1) a (2). Křivka Γ_2 je vytvořena z části Γ_b a čáry Γ_{ab} spojující body (1) a (2). Pak platí, že cirkulace po celé křivce $\Gamma_a + \Gamma_b$ je rovna součtu cirkulací po křivkách $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

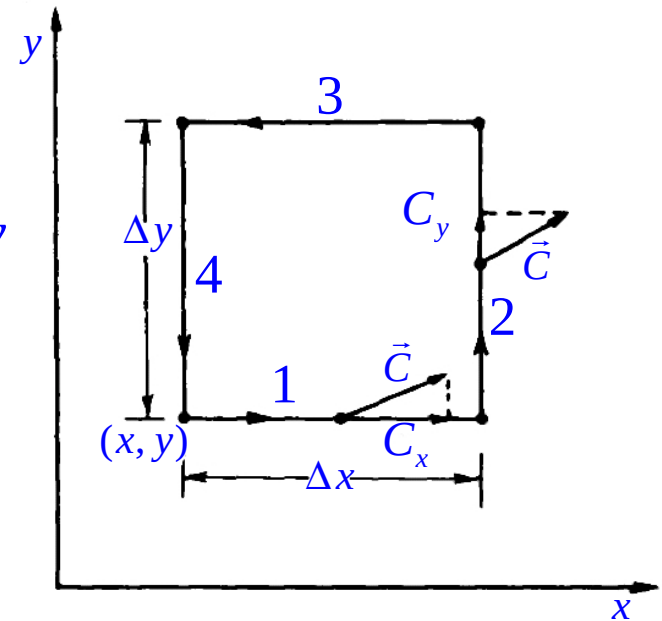


Cirkulace po obvodu čtverce – Stokesova věta

Křivkový integrál podél obvodu celého čtverce je dán součtem:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y$$

Výrazy: $[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x$ jsou obecně nenulové.
 $[C_y(2) - C_y(4)]\Delta y$



Za $C_x(3)$ a $C_y(4)$ dosadíme ze vztahů:

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y \quad C_y(4) = C_y(2) + \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x$$

Pak je cirkulace vektoru $\mathbf{C}$ po obvodu čtverce rovna:

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Což je součin z-tové složky vektoru rotace vektoru $\mathbf{C}$. a plochy infinitesimálního čtverce.

$$(\nabla \times \vec{C})_z \Delta S$$

Z-tová složka vektoru rotace je však normálou k plošnému elementu ΔS . Cirkulaci vektoru $\vec{C}$ po obvodu čtverečku pak vyjádříme ve vektorovém tvaru:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = \left(\nabla \times \vec{C} \right)_n \Delta S = \left(\nabla \times \vec{C} \right) \cdot \vec{n} \Delta S$$

Stokesova věta:

Cirkulaci po obvodu libovolné uzavřené křivky pak můžeme dát do souvislosti s rotací vektorového pole. Křivku vyplníme nějakou vhodnou plochou, plochu rozdělíme do mnoha infinitesimálních čtverečků, spočteme cirkulaci pole po obvodech těchto čtverečků a vše sečteme. Tedy spočteme plošný integrál.

$$\oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{n} dS$$

kde S je libovolná plocha ohraničená křivkou Γ .

Při výpočtu je třeba respektovat znaménkovou konvenci, cirkulace vektoru je kladná postupujeme-li po křivce v kladném směru, tj. proti směru chodu hodinových ručiček.