I.

Základní matematické znalosti

"Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody...Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví."
R.P.Feynman

Vektory a skaláry

Pojmem veličina označujeme určitou vlastnost, těles, jevů a látek kterou lze určitým kvantifikovat, tzn. udat její hodnotu.
Fyzikální veličiny jsou tedy veličiny, které se vztahují k fyzikálním vlastnostem těles, jevů a látek.

Každá fyzikální veličina je kromě své hodnoty popsána ještě fyzikálním rozměrem.

Fyzikální veličiny s nimiž se běžně setkáváme rozdělujeme na skalární veličiny a vektorové veličiny.

Skalární veličiny- jsou dostatečně charakterizovány svojí hodnotou a fyzikálním rozměrem. Příkladem skalárních veličin jsou objem, elektrické napětí, výkon, teplota, práce atd.

V textu je zpravidla označujeme malými písmeny abecedy psanými kurzívou (*a*, *b*,..), počítáme s nimi stejně jako s čísly a platí pro ně i stejná matematická pravidla. Pro skalární veličiny platí komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

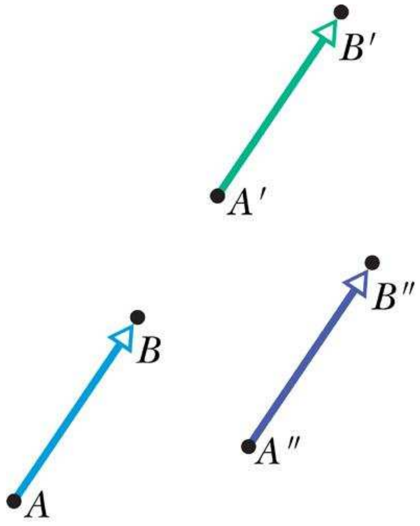
$$a(b+c)=ab+ac$$

Vektorové veličiny -k jejich určení je třeba znát nejen velikost ale též směrem působení

Příkladem vektorové veličiny je vektor přemístění tělesa v grafickém znázornění je obrazem vektoru přemístění orientovaná úsečka směřující od počátečního bodu *A* ke koncovému bodu *B*.

Vzdálenost počátečního bodu a koncového bodu nazýváme velikost vektoru.

V textu zpravidla zapisujeme vektory
- malými písmeny abecedy psanými tučným písmem (**a**, **b**,..)
- malým písmenem abecedy nad nímž je umístěna šipka $\vec{a}$
- případně $\overrightarrow{AB}$.



Tři vektory na obrázku směřující od bodu *A* do bodu *B*, od *A*´ do *B*´ a konečně od *A*´´ do *B*´´, mají stejný směr a stejnou velikost, jsou to tedy pouze posunuté obrazy jednoho a toho samého vektoru.

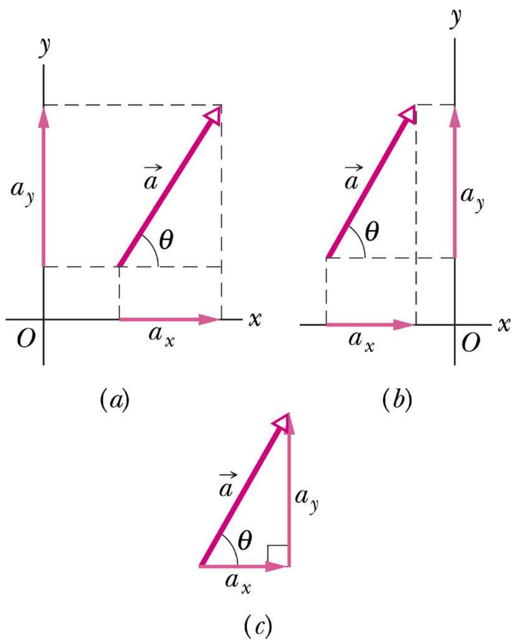
Vyjádření vektoru ve složkách.

K praktickému počítání s vektorovými veličinami je třeba nejprve studovaný systém spojit s vhodnou souřadnou soustavou.

V zavedené souřadné soustavě pak lze vektor zapsat jako vektorový součet jeho vektorových složek.

K tomu abychom zapsaly vektor pomocí jeho složek je třeba znát tzv. projekce vektoru do jednotlivých souřadných os:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\theta,\ a_y = |\vec{a}|\sin\theta$$



kde $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + b_y^{\,2}}$ je velikost vektoru.

Vyjádření vektoru pomocí vektorových složek: $\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$

Kde $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ jsou jednotkové vektory (vektor o velikosti rovné 1), mířící ve směru souřadnicových os *x* a *y*.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + b_y^{\,2}} = 1$$

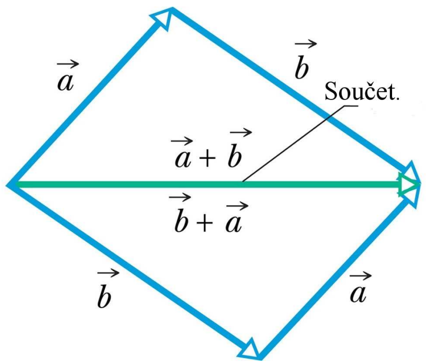
Počítání s vektory.

1. grafické počítání s vektory

1.1 Sčítání vektorů.

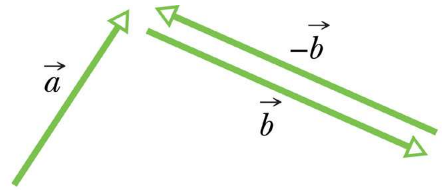
- sčítání vektorů je komutativní.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



1.2 Opačný vektor.

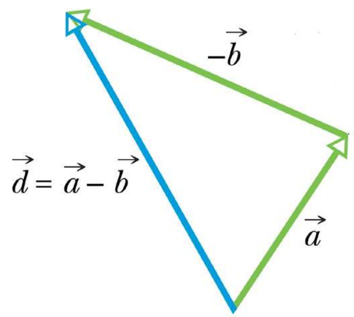
- opačný vektor je vektor, stejné velikosti jako původní vektor, ale opačného směru.



(a)

1.3 Odčítání vektorů.

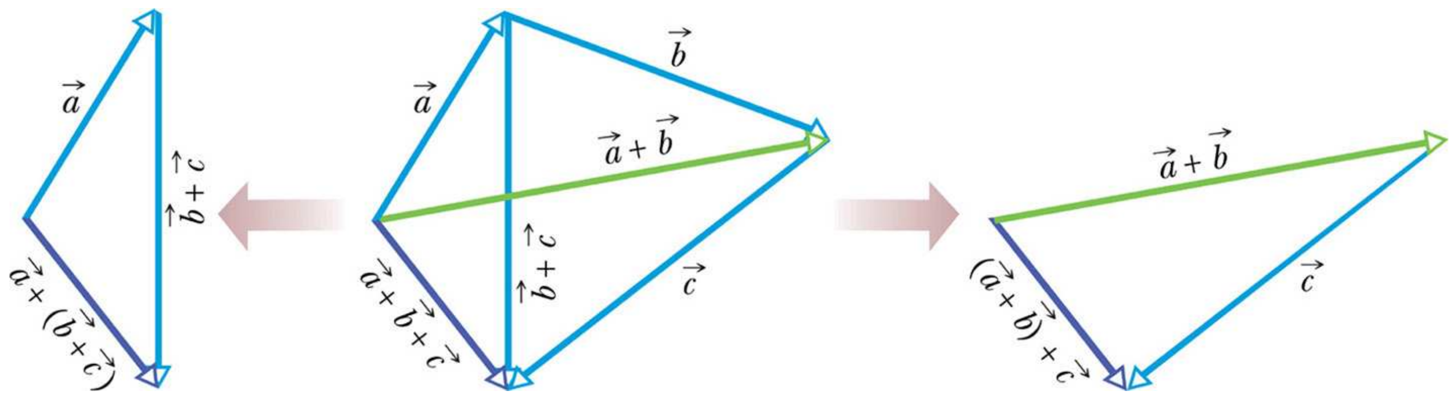
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



(b)

Operace sčítání a odčítání vektorů je komutativní a asociativní:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$



2. Počítání s vektory ve složkovém tvaru.

2.1 Sčítání a odčítání vektorů

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \pm (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = (a_x \pm b_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_y \pm b_y)\hat{\mathbf{j}} + (a_z \pm b_z)\hat{\mathbf{k}}$$

2.2 Násobení vektorů

Výsledkem násobení vektoru $\vec{a}$ skalárem s je nový vektor $\vec{b} = s\vec{a}$.

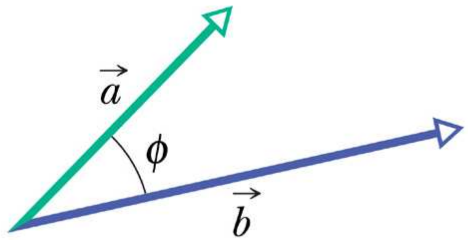
Velikost nového vektoru je $\left|\vec{b}\right| = s\left|\vec{a}\right|$.

Je-li $s > 0$ pak $\vec{b}$ je vektor stejného směru a smyslu jako původní vektor $\vec{a}$.

Je-li $s < 0$ pak $\vec{b}$ je vektor stejného směru ale opačného smyslu než původní vektor $\vec{a}$.

2.2.1. Skalární součin dvou vektorů

Výsledkem skalárního násobení dvou vektorů je číselná hodnota daná vztahem: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\phi$



Skalární součin ve vektorových složkách: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vlastnosti skalárního součinu

Skalární součin dvou vektorů je komutativní operace: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Skalární součin součin distributivní operace vzhledem ke sčítání vektorů: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou kolmé jestliže platí $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Skalární součin je invariantní při transformaci souřadnic vektoru mezi souřadnicovými soustavam S a S':

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$$

kde a_i a b_i jsou souřadnice vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ v soustavě S a $a_{i'}$ a $b_{i'}$ jsou souřadnice vektorů $\vec{a}'$ a $\vec{b}'$ v soustavě S'

2.2.2. Vektorový součin vektorů

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ o velikosti dané vztahem : $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi$.

Vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vyjádřený ve vektorových složkách:

$$\vec{a} = a_x \hat{\mathrm{i}} + a_y \hat{\mathrm{j}} + a_z \hat{\mathrm{k}}, \;\; \vec{b} = b_x \hat{\mathrm{i}} + b_y \hat{\mathrm{j}} + b_z \hat{\mathrm{k}}, \;\; \vec{c} = c_x \hat{\mathrm{i}} + c_y \hat{\mathrm{j}} + c_z \hat{\mathrm{k}}$$

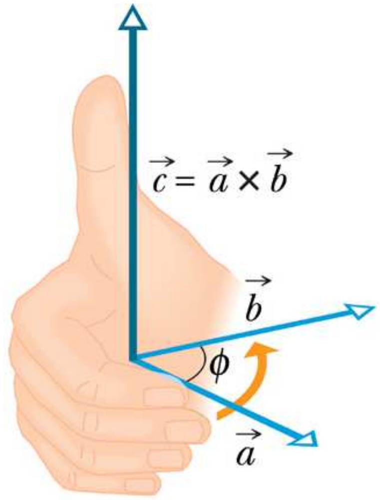
Složky vektoru $\vec{c}$ jsou dány následujícími vztahy:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Vektorový součin lze výhodně vyjádřit ve tvaru determinantu matice:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Vlastnosti vektorového součinu



Směr vektoru je pak dán pravidlem pravé ruky.

Velikost vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$ je rovna velikosti plochy rovnoběžníku tvořeného vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Pořadí vektorů ve kterém vektory násobíme je důležité, vektorový součin je antikomutativní: $\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Pro vektorový součin platí distributivní zákon vzhledem ke sčítání vektorů: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Pro trojnásobný vektorový součin platí vztah: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Matematická funkce

Jazykem fyziky je matematika, fyzikální veličiny vstupují do vzájemných vztahů a jsou tedy na sobě závislé. Matematika označuje vzájemný vztah mezi proměnnými pojmem matematická funkce.

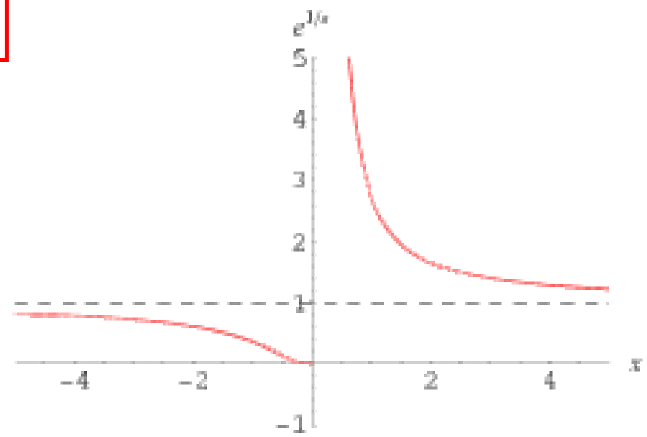
Funkce.

Funkce je předpis, kterým definovaným způsobem přiřazujeme prvkům jedné množiny prvky jiné množiny. Jsou-li tyto množiny, množiny čísel (většinou reálných nebo komplexních) pak mluvíme o reálné nebo komplexní funkci, Jsou-li prvky skaláry nebo vektory pak se jedná o skalární nebo vektorovou funkci.

Funkce tedy nazýváme zobrazení množiny (z množiny) M do množiny (na množinu) N:

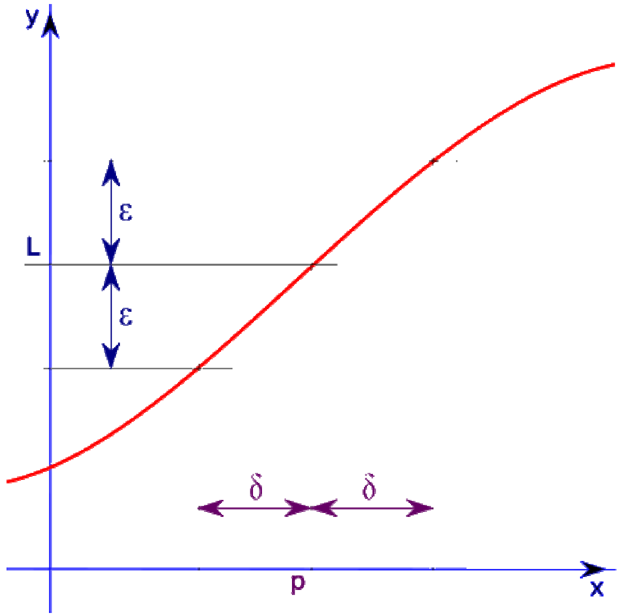
$$\boxed{f(x): M \to N}$$

Množinu M nazýváme definičním oborem D_f, množinu N oborem hodnot R_f.



Limita a spojitost funkce

Vlastní limita ve vlastním bodě



Funkce $f(x)$ má v bodě $p \in R$ (reálné) limitu $L \in R$ (reálné) jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (p-\delta, p+\delta)$, $x \neq p$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Píšeme:

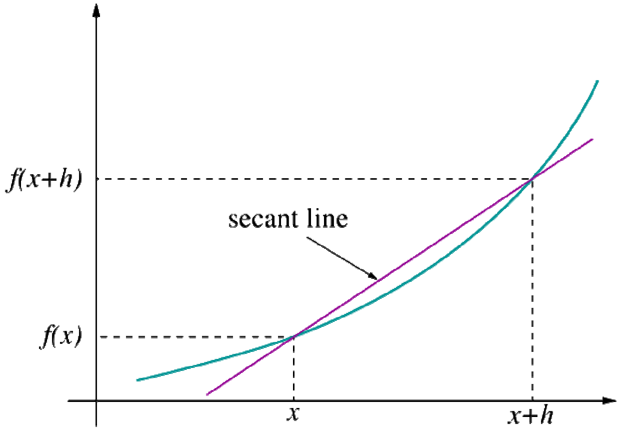
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Funkce $f(x)$ je v bodě $p \in R$ (reálné) spojitá, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (p-\delta, p+\delta)$, platí $f(x) \in (f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon)$.

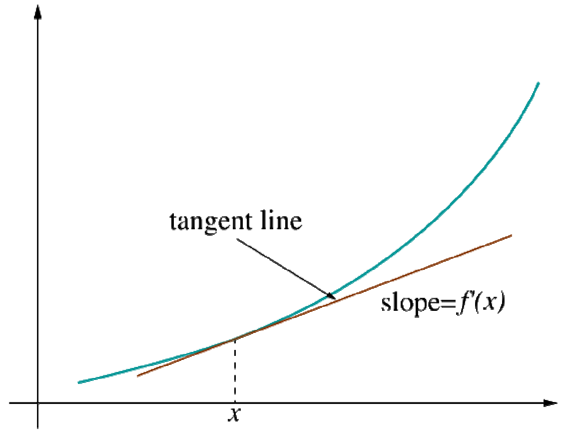
Derivace funkce

Derivace funkce je definována:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Fyzikální význam derivace

Derivace udává rychlost změny sledované veličiny

Jak derivace funguje

Najděme vztah pro rychlost tělesa, za předpokladu, že jeho dráhu můžeme popsat vztahem:

$$s = At^3 + Bt + C$$

Změňme t na $t + \Delta t$, s na $s + \Delta s$, pak platí:

$$s + \Delta s = A(t + \Delta t)^3 + B(t + \Delta t) + C$$

Jednoduchými úpravami dostaneme pro pravou stranu rovnice výraz:

$$At^3 + Bt + C + 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3$$

pro Δs tedy platí: $\Delta s = 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3$

Ptáme se však na okamžitou rychlost, podělme proto výraz pro Δs Δt :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3At^2 + B + 3At(\Delta t) + A(\Delta t)^2$$

Toto je rovnice pro průměrnou rychlost, proto abychom získali vztah z něhož můžeme určit rychlost v každém okamžiku musíme přejít k limitě:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

pro rychlost v každém okamžiku pak platí:

$$\frac{ds}{dt} = 3At^2 + B$$

Pravidla derivování

Derivace konstantní funkce $f(x) = c$: $\boxed{f'(x) = 0}$

Derivace součtu funkcí: $\boxed{(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)}$

pro všechny funkce $f(x)$ a $g(x)$ a všechna reálná čísla a a b

Derivace součinu funkcí: $\boxed{(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

pro všechny funkce $f(x)$ a $g(x)$

Derivace podílu funkcí: $\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$

pro všechny funkce $f(x)$ a $g(x)$ kde $g(x) \neq 0$.

Derivace složené funkce: $\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)}$

Derivace elementárních funkcí

Mocninná, exponencielní a logaritmické funkce

Funkce	Derivace funkce
$f(x) = x^r$	$\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$ (*r* je reálné číslo)
$f(x) = e^x$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$
$f(x) = a^x$	$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$
$f(x) = \ln(x)$	$\frac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$
$f(x) = \log_a(x)$	$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)},\ x > 0$

Goniometrické funkce

Funkce	Derivace funkce
$f(x) = \sin(x)$	$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \mathrm{cotg}(x)$	$\frac{d}{dx}\mathrm{cotg}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
$f(x) = \arcsin(x)$	$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arccotg}(x)$	$\frac{d}{dx}\mathrm{arc\,cotg}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$