



Mechanická práce a kinetická energie

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Mechanická práce

Účinek síly na pohyb tělesa, které bylo buď v klidu nebo se pohybovalo, můžeme posuzovat buď podle **dráhy**, na níž síla působila nebo podle **dobu** po níž síla působila. Výsledek působení však vždy vyplývá z Newtonova pohybového zákona síly:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Vynásobením obou stran předchozí rovnice dostaneme vztah: $m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Dosazením za vektoru rychlosti ve tvaru $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{\tau}^0 = v\vec{\tau}^0$ a provedením příslušných úprav

$$\left(\begin{aligned} \vec{v} \cdot d\vec{v} &= v\vec{\tau}^0 \cdot d(v\vec{\tau}^0) = v\vec{\tau}^0 \cdot (dv\vec{\tau}^0 + v d\vec{\tau}^0) \\ &= v dv\vec{\tau}^0 \cdot \vec{\tau}^0 + v^2 \vec{\tau}^0 \cdot d\vec{\tau}^0 = v dv \end{aligned} \right)$$

dostaneme rovnici $m v dv = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integrací obou stran rovnice v příslušných mezích získáme:

$$\int_{v_1}^{v_2} m v dv = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Výraz $W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ je **mechanická práce síly** po dráze mezi místy vymezenými polohovými vektory $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$.

Výraz $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ souvisí s pohybovým stavem tělesa, označujeme jej **kinetická energie**.

Výsledkem práce síly působící na těleso je změna pohybového stavu tělesa, jeho kinetické energie:

$$\Delta E_{kin} = E_{kin.1} - E_{kin.2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{12}$$

Jestliže kinetická energie tělesa o hmotnosti m vzroste, pak vykonanou práci označujeme jako dodanou práci $W > 0$.

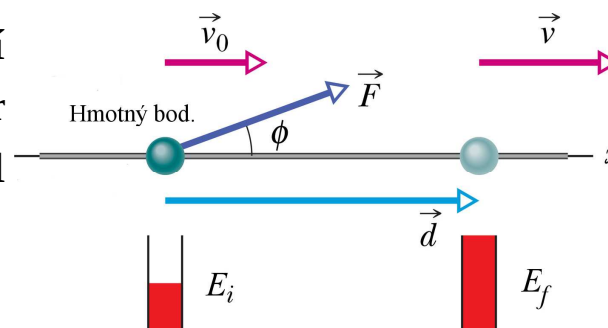
Opačně, klesne-li kinetická energie tělesa hmotnosti m , pak říkáme, že těleso práci vykonalo $W < 0$.

Jednotkou **mechanické práce** a **kinetické energie** je 1 joule, 1J). Těleso hmotnosti $m = 1\text{kg}$ pohybující se rychlostí $v = 1\text{ m/s}$ má kinetickou energii 1J.

Práce vykonaná konstantní silou působící na těleso pohybující se v přímém směru.

Uvažujme hmotný bod hmotnosti m pohybující se bez tření po napnutém drátu horizontálně ve směru osy x . Vektor působící síly $\mathbf{F}$, svírá se směrem pohybu hmotného bodu úhel ϕ . Z Newtonova zákona síla vyplývá:

$$F_x = ma_x$$



Předpokládejme, že se hmotný bod na počátku pohyboval s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$. Od okamžiku kdy na něj začala působit konstantní síla $\mathbf{F}$ urazil dráhu $\mathbf{d}$ a dosáhl rychlosti $\mathbf{v}$. Použijeme-li následující vztah:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d$$

Pak po dosazení za a_x do vztahu pro druhý NZ následující vztah:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_f - E_i = F_x d$$

E_i je počáteční kinetická energie, E_f je konečná kinetická energie: $E_f = \frac{1}{2}mv^2$, $E_i = \frac{1}{2}mv_0^2$

Výraz $W = Fd \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{d}$ je práce síly $\mathbf{F}$ na dráze délky $\mathbf{d}$. $W > 0$ pro hodnoty $0 < \varphi < 90^\circ$, $W < 0$ pro $90^\circ < \varphi < 180^\circ$

Působí-li na těleso více než jedna síla, pak lze práci vykonanou výslednicí sil určit následujícím způsobem:

1. Nejprve spočteme práci, vykonanou každou z působících sil zvlášť, celková práce je pak jejich součtem:

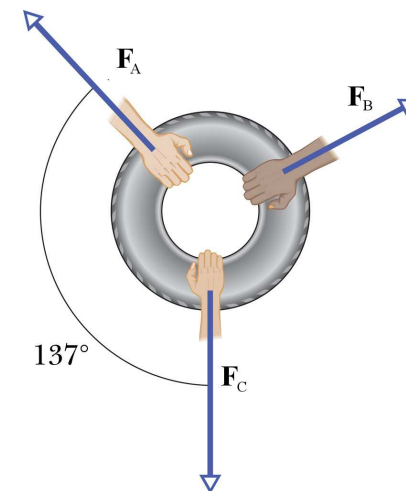
$$W_{net} = W_A + W_B + W_C$$

2. Nejprve spočítáme výslednou sílu $\mathbf{F}_{net}$ a následně pak vykonanou práci:

Výsledná síla je vektorovým součtem sil $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_C$: $\mathbf{F}_{net} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C$

Výsledná mechanická práce: $W_{net} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

Změna mechanické energie: $\Delta E = E_f - E_i = W_{net}$



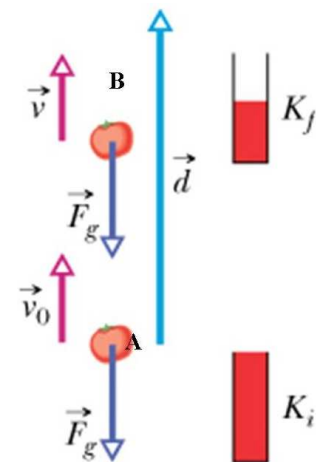
Práce vykonaná gravitační silou.

Uvažujme těleso hmotnosti m vržené kolmo vzhůru z místa A s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0$. Se vzrůstající výškou tělesa klesá v důsledku práce konané gravitační silou $\mathbf{F}_g$, jeho tělesa a tedy i jeho kinetická energie. V místě B má pak těleso rychlost $\mathbf{v} < \mathbf{v}_0$. Práce W_g vykonaná gravitační silou při stoupání tělesa $A \rightarrow B$:

$$W_g (A \rightarrow B) = mgd \cos 180^\circ = -mgd$$

Práce W_g vykonaná gravitační silou při klesání tělesa $A \rightarrow B$:

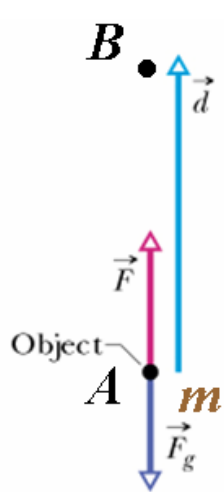
$$W_g (B \rightarrow A) = mgd \cos 0^\circ = mgd.$$



Práce vykonaná silou při zvedání a klesání tělesa.

Zvedání tělesa.

Máme objekt hmotnosti m zvedaný silou $\mathbf{F}$ z místa A do místa B . V místě A , na počátku pohybu je objekt v klidu po dosažení bodu B je rychlost objektu rovna nule. Síla $\mathbf{F}$ se může libovolně měnit. Platí rovnice:



$$\Delta E = E_f - E_i = W_{\text{net}}$$
$$E_i = E_f \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow W_{\text{net}} = 0$$

Na těleso působí gravitační síla $\mathbf{F}_g$ a síla $\mathbf{F}$ zvedající těleso vzhůru.

$$W_{\text{net}} = W_F (A \rightarrow B) + W_g (A \rightarrow B) = 0 \rightarrow$$

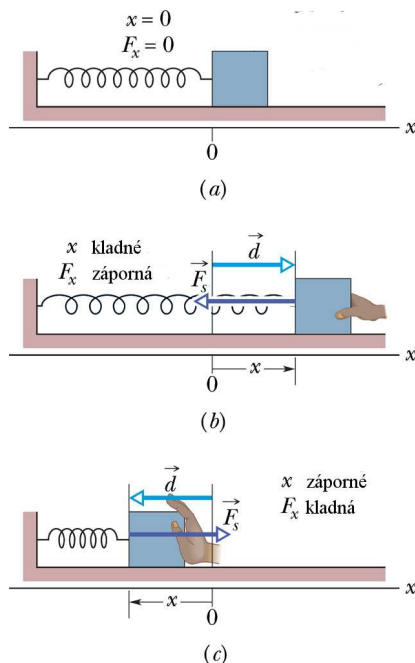
$$W_F (A \rightarrow B) = -W_g (A \rightarrow B)$$

$$W_g (A \rightarrow B) = mgd \cos 180^\circ = -mgd \rightarrow W_F (A \rightarrow B) = mgd$$

Klesání tělesa.

Směr pohybu objektu je $B \rightarrow A$: $W_g (B \rightarrow A) = mgd \cos 0^\circ = mgd$

$$W_F (B \rightarrow A) = -W_g (B \rightarrow A) = -mgd$$



Práce elastické (pružné) síly

Síla působící na těleso připevněné k pružině při natažení nebo stlačení pružiny je úměrná natažení nebo stlačení pružiny-výchylce x z rovnovážné polohy: $F = -kx$

Konstanta úměrnosti k je charakteristická pro danou pružinu a nazývá se **konstantou pružnosti (silová konstanta)**. Vztah pro sílu pružnosti je známý též jako **Hookův zákon**.

Uvažujme uvolněnou pružinu s konstantou pružnosti k (a). Postupným natahováním pružiny se změnila délka pružiny z délky x_i (b) na délku x_f (c). Práce vykonaná vnější silou při natahování pružiny vypočteme:

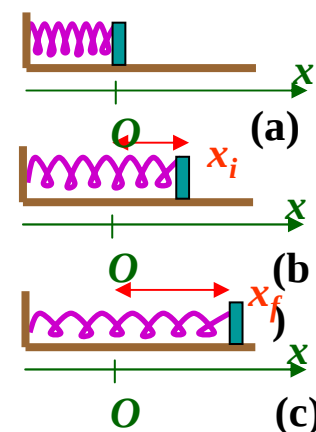
$$W_p = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = \left(-\frac{1}{2}k\right) \left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

Práce elastické síly při změně délky pružiny o délku $(x_i - x_f)$:

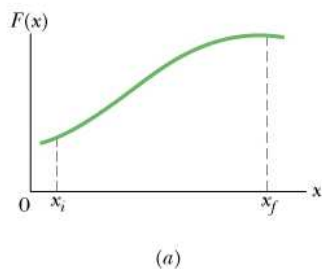
$$W_p = \left(-\frac{1}{2}k\right) (x_f^2 - x_i^2)$$

Obvykle bývá na počátku pružina relaxovaná $x_i=0$, pak buď pružinu stlačíme nebo natáhneme $x_f = \pm x$, v tom případě:

$$W_{elast} = -\frac{1}{2}kx^2$$



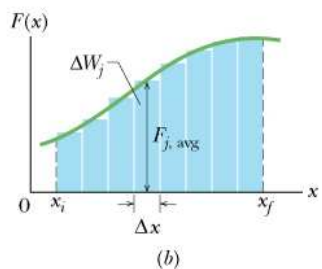
Mechanická práce obecné síly $F(x)$ působící po dráze x .



Síla $F \neq \text{konst.}$ je funkcí polohy x (obr. a). Jak vypočítáme práci vykonanou silou po dráze x mezi počáteční (x_i) a konečnou polohou (x_f) v tomto případě?

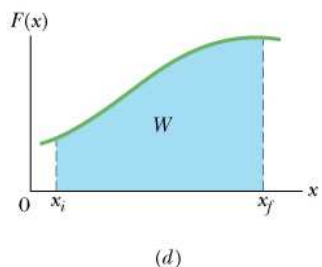
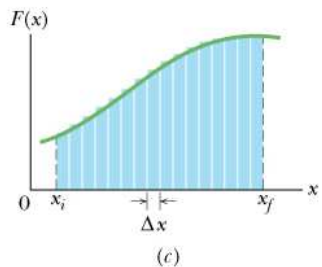
Rozdělíme interval (x_i, x_f), na N stejných částí délky Δx (obr.b). Práce vykonaná silou F v j -tém intervalu $\Delta W_j = |F_{j, \text{avg}}| \Delta x_j$, kde $|F_{j, \text{avg}}|$ je průměrná hodnota velikosti vektoru síly F v j -tém intervalu. Celková práce vykonaná po dráze mezi body (x_i, x_f) je dána součtem:

$$W = \sum_{j=1}^N F_{j, \text{avg}} \Delta x$$



V limitě pak pro $N \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) (obr.c) dostaneme pro práci proměnné síly působící na těleso po dráze x vztah:

$$W = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \sum_{j=1}^N F_{j, \text{avg}} \Delta x_j = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$



Práce W je tedy rovna ploše po křivkou omezenou osou x v intervalu (x_i, x_f), křivkou $F(x)$ a kolmicemi procházejícími body x_i a x_f .

Mechanická práce obecné síly působící po obecné dráze.

Uvažujme těleso na nějž působí obecná síla v prostoru: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$

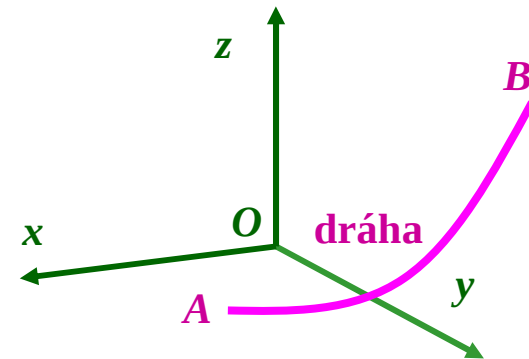
Předpokládáme, že složky síly do směru jednotlivých os nezávisí na zbývajících dvou souřadnicích.

Elementární práce vykonaná silou na elementu dráhy

$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

je:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$



Celková práce na dráze mezi body o polohových vektorech $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_f$ je:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

Výkon síly

Práci vykonaná silou za jednotku času označujeme jako **výkon**. Vykoná-li síla za časový interval Δt práci W pak **průměrný výkon** působící síly je dán vztahem :

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t}$$

Přechodem k limitě $\Delta t \rightarrow 0$ dostaneme hodnotu okamžitého výkonu:

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt}$$

Jednotkou výkonu je **1 Watt** = **1Js⁻¹** , 1W; (James Watt). V technické praxi (odběr elektřiny, tepla) se často užívá jednotky **1 kilowatt-hodina**:

$$1 \text{ kilowatt-hodina} = 1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3,60 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,60 \text{ MJ}$$

Vyjádření výkonu prostřednictvím působící síly a okamžité rychlosti tělesa:

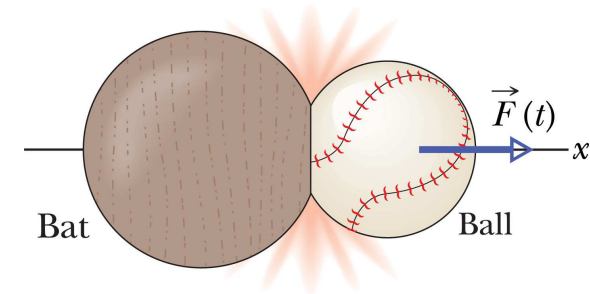
$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos(\phi) dx}{dt} = F \cos(\phi) \left(\frac{dx}{dt} \right) = Fv \cos(\phi)$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Impulz síly

Časový účinek síly- **impulz síly**- charakterizuje působení síly z hlediska délky jejího působení.

Pálka odpalující míček působí po dobu t na míček silou $\mathbf{F}(t)$. Po odpálení míčku se změní hybnost míčku o $\Delta \mathbf{p}$.



$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$$

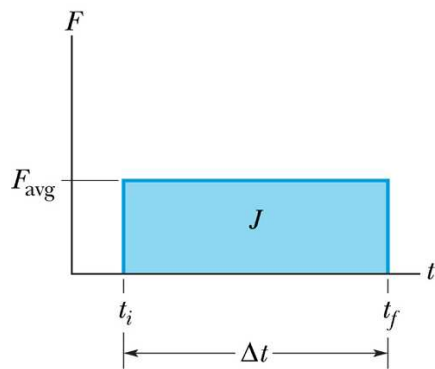
$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p}$$

t_1 Změna hybnosti tělesa.

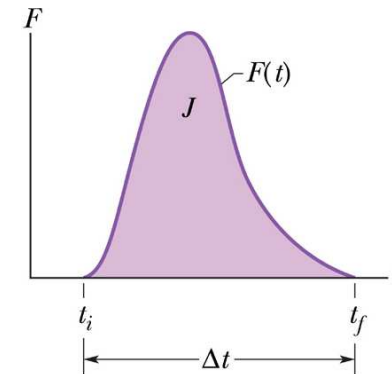
$$\Delta \vec{p} = \vec{J}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \vec{J}$$

Impulz síly.



Impulz síly $\mathbf{F} = \text{konstanta}$.



Impulz síly pro libovolnou sílu $\mathbf{F}(t)$.