



# Rotace tuhého tělesa

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

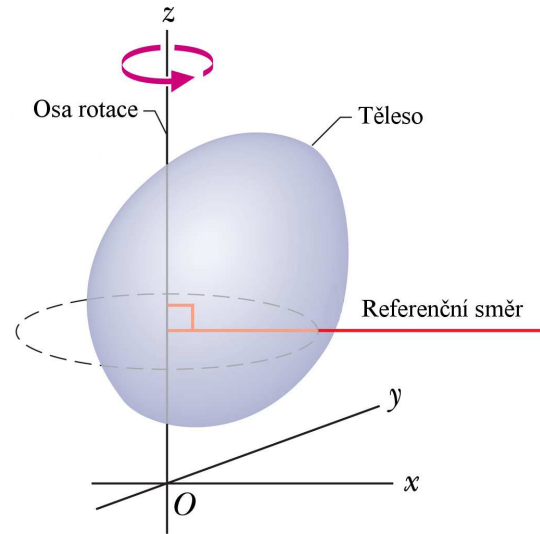
Fundamentals of Physics 8<sup>th</sup> Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Snads

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

# Otáčení tuhého tělesa-základní definice.



## Tuhé těleso

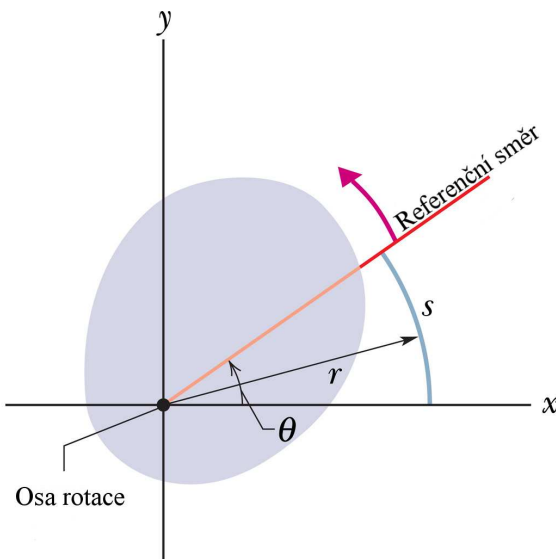
Těleso, které se pohybuje jako celek beze změny tvaru. Všechny části tělesa jsou pevně svázány.

## Osa rotace

Směr v prostoru procházející tělesem okolo nějž se těleso otáčí. Pevná osa rotace znamená, že směr osy se v čase nemění.

## Referenční přímka-průvodič

Referenční přímka je přímka pevná v tělese, kolmá na směr osy otáčení. Úhel svíraný referenční přímkou a pevně zvoleným směrem je veličinou, souřadnicí, jíž určujeme velikost otočení tělesa okolo rotační osy.



Úhel otočení měříme v radiánech, **1 rad**; poměr délky kruhového oblouku **s** ku poloměru kruhu **r**:

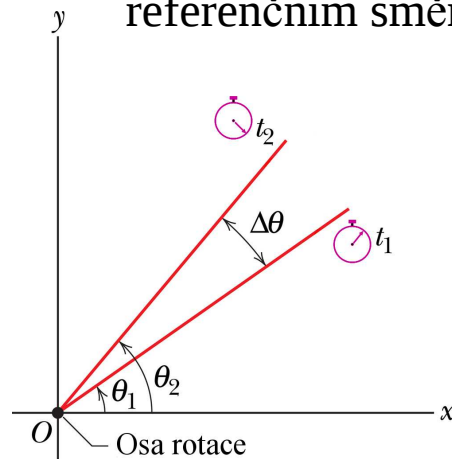
$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$1 \text{ otáčka referenční přímky} = 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ$$

Mění-li se úhel otočení referenční přímky (tuhého tělesa) v čase, pak je úhel otočení  $\theta(t)$  funkcí času. Hodnotu úhlu  $\theta(t)$  v libovolném okamžiku  $t$  určujeme vzhledem k hodnotě úhlu  $\theta(0)$  čase  $t = 0$ .

## Úhlové přemístění.

Úhlové přemístění  $\Delta\theta$  je rozdíl úhlů svíraných zvoleným libovolně zvoleným referenčním směrem - průvodičem v časech  $t_1$  a  $t_2$ :  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$



Úhlové přemístění je stejné pro všechny body tuhého tělesa, neboť všechny body tělesa jsou „svázány“ dohromady.

## Úhlová rychlost.

Průměrnou úhlovou rychlost definujeme:  $\omega_{\text{prům.}} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Okamžitá úhlová rychlost je limitou průměrné rychlosti pro  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

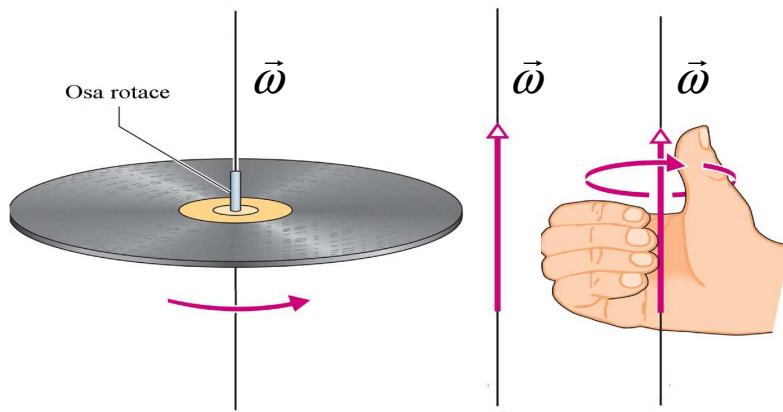
Si jednotkou úhlové rychlosti je **radian s<sup>-1</sup>**.

Rotuje-li těleso proti směru hodinových ručiček pak je  $\omega > 0$ , rotuje-li ve směru hodinových ručiček je  $\omega < 0$ .

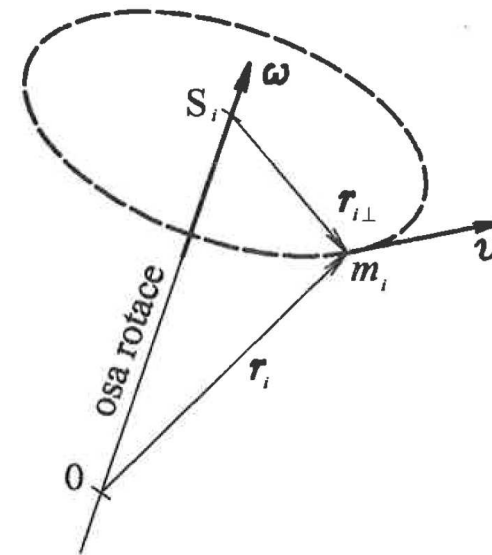
## Úhlová rychlost je vektor.

Algebraické znaménko úhlové rychlosti určuje smysl rotace tělesa. Úhlová rychlost má tedy nejen velikost, ale také směr a je tedy vektorovou veličinou:

1. Vektor úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  míří ve směru osy otáčení.
2. Smysl vektoru úhlové rychlosti určuje orientaci otáčení tělesa a je definován **pravidlem pravé ruky**.

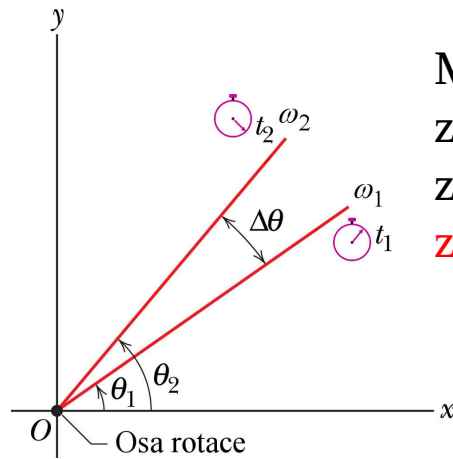


Pravidlo pravé ruky.



Směr vektoru úhlové rychlosti.

## Úhlové zrychlení



Mění-li se rychlost rotace tuhého tělesa s časem, pak rychlost změny rychlosti je dána úhlovým zrychlením. Průměrná rychlost změny úhlové rychlosti rotace tuhého tělesa - **průměrné úhlové zrychlení** je definováno:

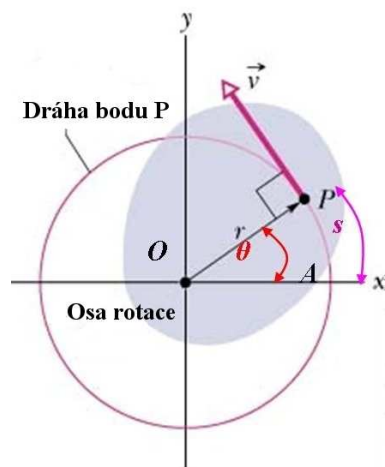
$$\alpha_{\text{prům.}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$\omega_1$  a  $\omega_2$  jsou úhlové rychlosti v čase  $t_1$  a  $t_2$ .

Okamžité úhlové zrychlení je definováno jako limita průměrného úhlového zrychlení pro hodnotu  $\Delta \rightarrow 0$ .

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Si jednotkou úhlové rychlosti je **radian s<sup>-2</sup>**.



## Vztah úhlových a lineárních veličin.

Zvolme bod  $P$  v pevném tělese rotujícím okolo pevné osy. V čase  $t = 0$  leží průvodič spojující střed  $O$  s bodem  $P$  na ose  $x$  (bod  $A$ ). Během doby  $t$  urazí bod  $P$  pohybující se po kruhové dráze oblouk dlouhý  $s = AP$ . Za ten samý čas se průvodič  $OP$  bodu  $P$  otočí o úhel  $\theta$ .

## Vztah mezi úhlovou rychlostí a obvodovou rychlostí.

Délka kruhového oblouku  $s$  a k němu příslušející úhel  $\theta$ , jsou spojeny vztahem:  $s = r\theta$ , kde  $r$  je vzdálenost středu a bodu  $OP$ . Rychlost bodu  $P$  (obvodová rychlost)  $v$  je:

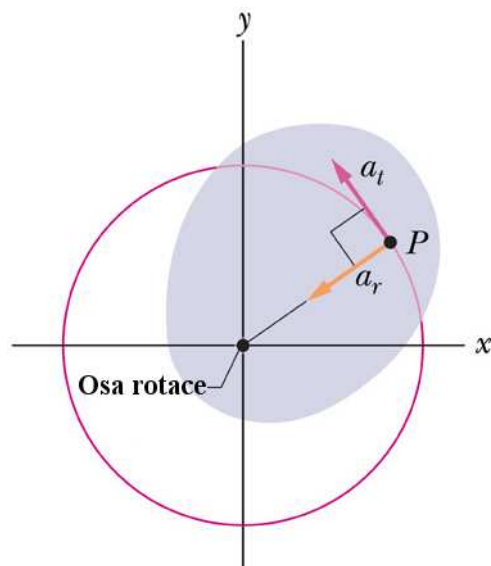
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \rightarrow \boxed{v = r\omega}$$

Doba jedné otáčky – perioda  $T$ :  $T = \frac{\text{obvod kružnice}}{\text{rychlost}} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$



## Zrychlení.

Zrychlení bodu  $P$  pohybujícího se po kruhové dráze lze rozložit na dvě komponenty. První je radiální složka mířící ve směru průvodiče a mířící tedy ke středu  $O$ . Označujeme ji jako **centripetální (dostředivé) zrychlení**. Jeho velikost je:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

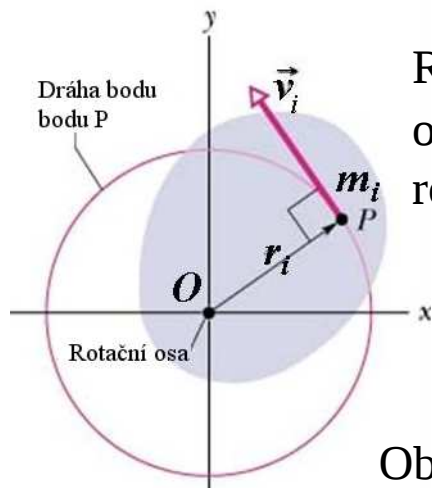
Druhá komponenta míří ve směru tečny k dráze v bodě  $P$  a označujeme ji tangenciální (tečná) zrychlení. Velikost tečné složky zrychlení je:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad a_t = r\alpha$$

Velikost zrychlení je dána vztahem:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}.$$

## Kinetická energie rotujícího tuhého tělesa.



Rozdělme těleso na části o hmotnostech  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots$ . Na obrázku má část v bodě  $P$  index  $i$  a hmotnost  $m_i$ . Kinetická energie rotace tělesa je součtem kinetických energií jednotlivých částí:

$$E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \dots \rightarrow E_{\text{kin.}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Obvodová rychlost  $i$ - tého bodu  $v_i = \omega r_i \rightarrow E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2$

Po úpravě dostaneme pro kinetickou energii rotujícího tělesa rovnici:

$$E_K = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

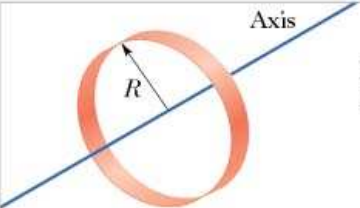
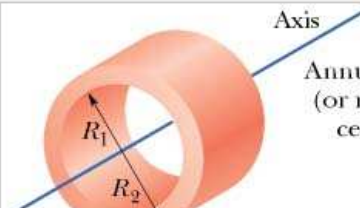
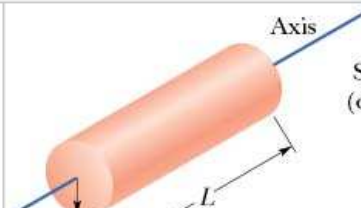
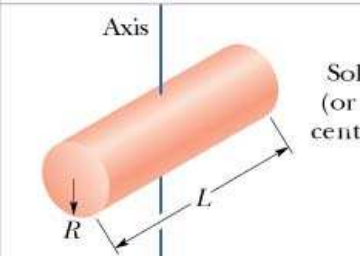
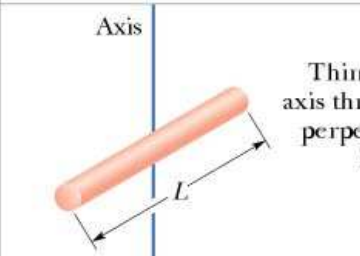
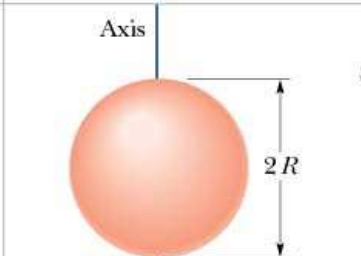
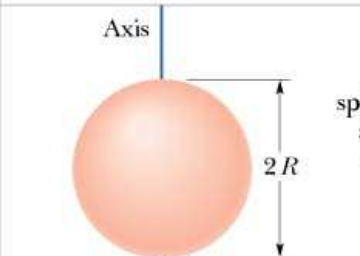
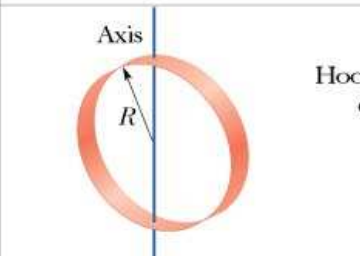
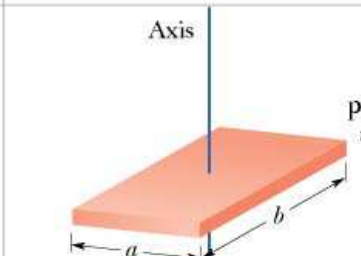
Člen  $I = \sum m_i r_i^2$  je **moment setrvačnosti** tělesa **vzhledem k ose rotace O**. V případě spojitého rozložení je třeba namísto součtu integrovat přes objem tělesa:

$$I = \rho \int r^2 dV$$

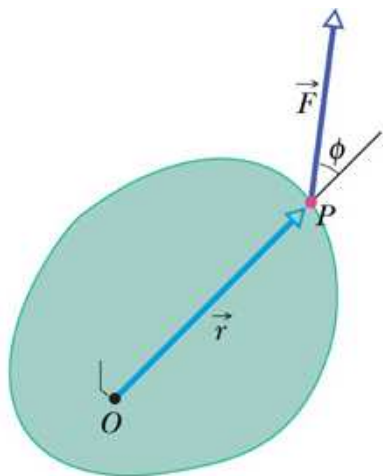
Moment hybnosti tuhého tělesa závisí na hmotnosti tělesa, jeho tvaru a na pozici osy rotace, proto je nutné vždy specifikovat osu rotace okolo níž se těleso otáčí.

## Tabulka momentů setrvačnosti pro různá tuhá tělesa.

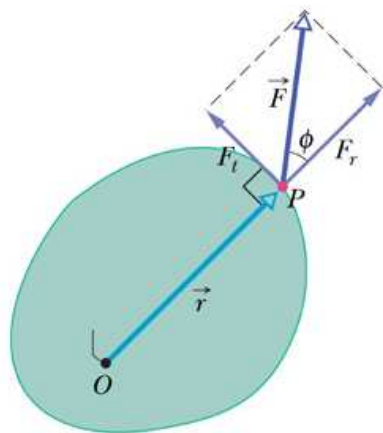
$$I = \int r^2 dm$$

|                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Axis</p> <p>Hoop about central axis</p> <p><math>I = MR^2</math></p> <p>(a)</p>                                                       |  <p>Axis</p> <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>(b)</p>   |  <p>Axis</p> <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(c)</p>             |
|  <p>Axis</p> <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(d)</p> |  <p>Axis</p> <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(e)</p> |  <p>Axis</p> <p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math></p> <p>(f)</p>                         |
|  <p>Axis</p> <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math></p> <p>(g)</p>                          |  <p>Axis</p> <p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(h)</p>                                   |  <p>Axis</p> <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math></p> <p>(i)</p> |

## Moment síly.

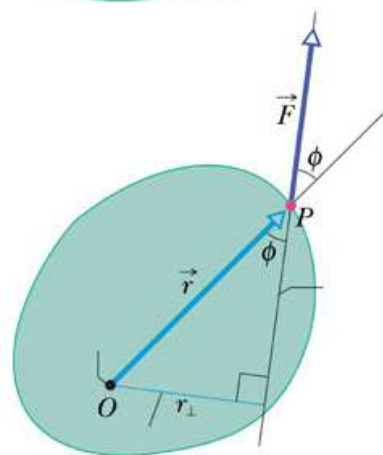


Máme pevné těleso které se může volně otáčet okolo pevné osy  $O$  procházející tělesem. Síla  $F$  otáčející tělesem působí v bodě  $P$  ležícím na spojnici kolmé k ose, ve vzdálenosti dané polohovým vektorem  $r$ . Z rozkladu síly  $F$  na složku tečnou  $F_t$  a  $F_r$  a radiální vyplývá, že otáčení tělesa způsobuje pouze tečná složka síly  $F_t$ .



Schopnost síly  $F$  otáčet tělesem závisí kromě velikosti tečné složky síly  $F_t$  též na vzdálenosti působíště síly  $P$  od osy otáčení  $r$ . Součin velikosti tečné složky působící síly a velikosti polohového vektoru působíště síly vyjadřuje **otáčivý účinek** působící síly, který nazýváme **moment síly**  $\tau$ :

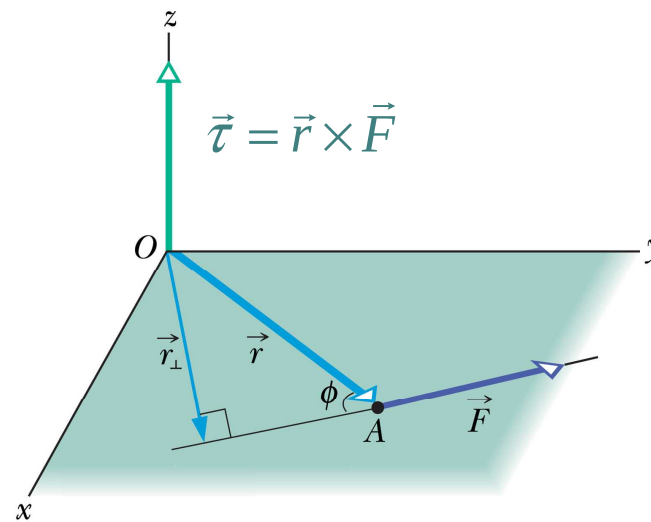
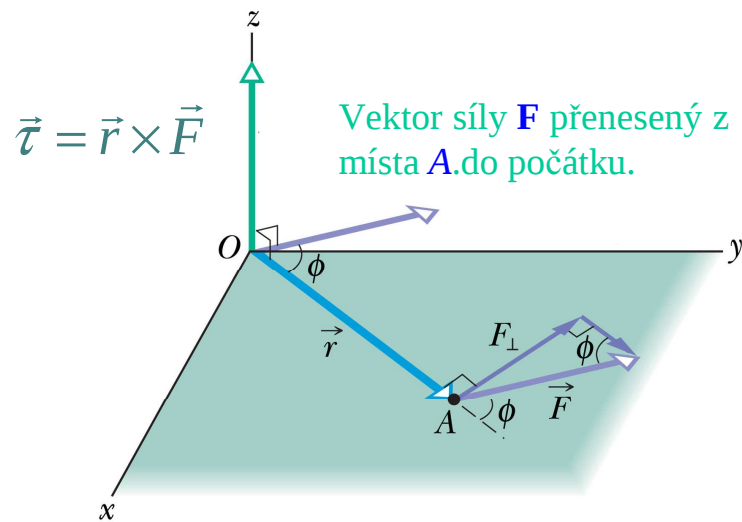
$$M = (r)(F \sin \phi) = rF_t$$



Moment síly lze zapsat též ve tvaru:  $\tau = rF_t = rF \sin \phi = r_{\perp} F$

Složku vektoru  $r_{\perp}$  nazýváme **rameno síly**:  $r_{\perp} = r \sin \phi$

Fyzikální jednotkou momentu síly je  $1\text{J} = 1\text{Nm}$ .

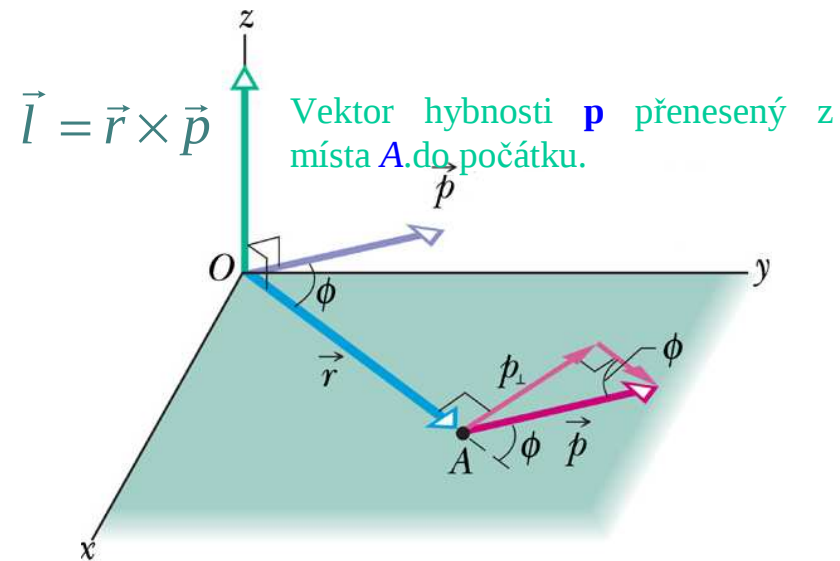
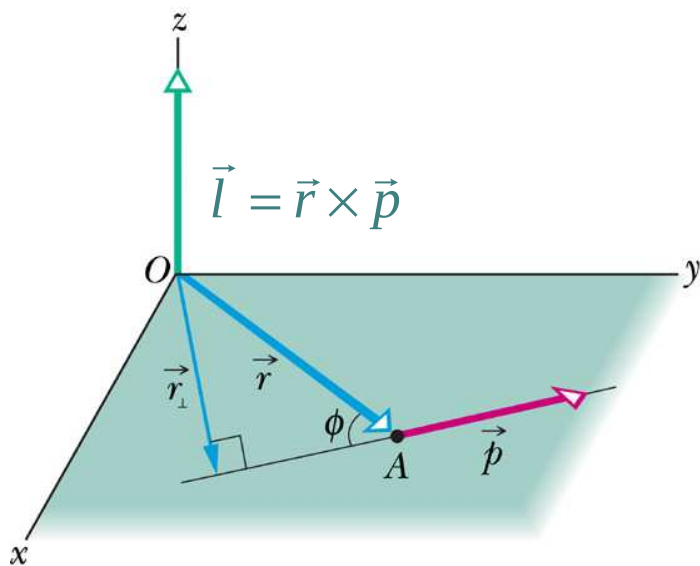


Zobecněním definice momentu síly pro libovolný směr vektoru působící síly  $\vec{F}$  je rovnice:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

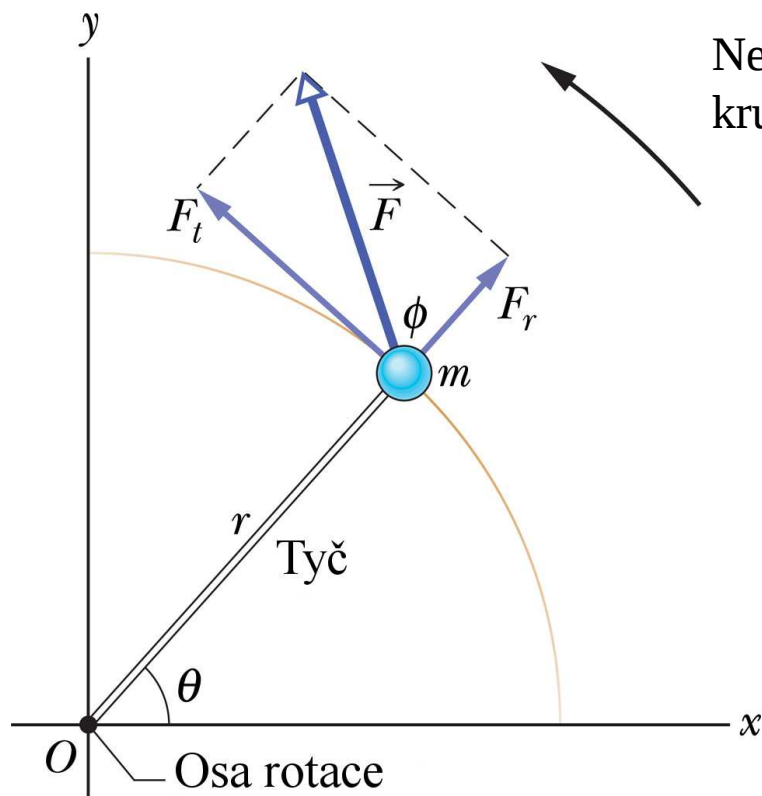
Platí:  $\tau = rF \sin \phi = r(F \sin \phi) = rF_{\perp} = (r \sin \phi)F = r_{\perp}F$

## Moment hybnosti.



Moment hybnost  $\vec{l}$ , neboli **točivost** je zavedena vztahem:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Newtonův zákon síly pro těleso pohybující se po kruhové dráze pak má tvar:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

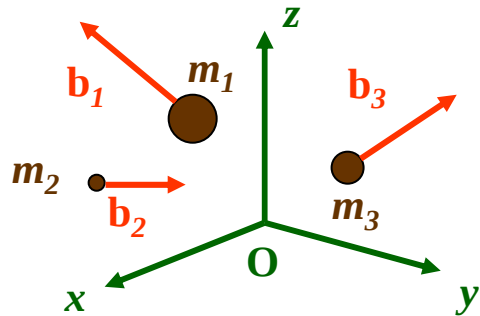
Newtonova zákona síly vyplývá vztah mezi momentem síly a úhlovým zrychlením pro tuhé těleso rotující kolem pevné osy:

$$|\vec{\tau}_{net}| = I |\vec{\alpha}|$$

Odvození:

$$\left. \begin{array}{l} F_t = ma_t \\ \tau = F_t r \\ a_t = \alpha r \end{array} \right\} \rightarrow \tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

## Moment hybnosti soustavy hmotných částic.



Celkový moment hybnosti soustavy  $n$  částic je dán vektorovým součtem dílčích momentů hybnosti:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \dots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i$$

Změna celkového momentu hybnosti soustavy  $n$  částic:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{l}_i}{dt}.$$

Z platnosti vztahů:  $\frac{d\vec{l}_i}{dt} = \vec{\tau}_{\text{net},i}$  pro všechny částice systému pak vyplývá pro

celkový moment hybnosti: .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{\text{net},i} = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

Celkový moment síly působící na systém  $n$  částic je roven časové změně celkového momentu hybnosti soustavy.

## Moment hybnosti tělesa rotujícího okolo pevné osy.

Velikost celkového momentu hybnosti tuhého tělesa  $L$  rotujícího okolo pevné osy (osa  $z$ ) najdeme jako součet všech  $z$  - tových komponent momentů hybnosti elementů hmotnosti  $\Delta m_i$ . Z obrázku (a) vyplývá pro velikost momentu hybnosti  $l_i$  elementu  $\Delta m_i$ :

$$l_i = r_i p_i \sin(\pi / 2) = r_i (\Delta m_i v_i)$$

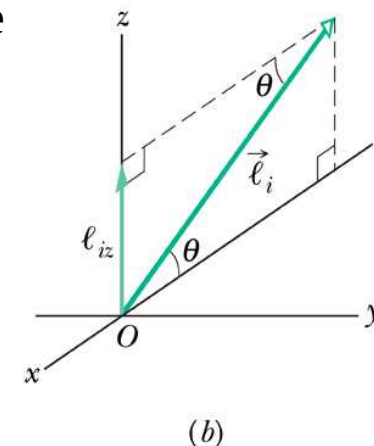
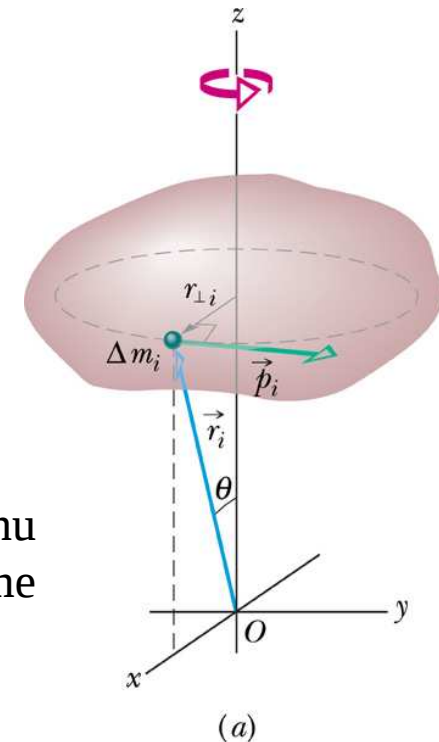
Vektor momentu hybnosti  $l_i$  elementu  $\Delta m_i$  musí být kolmý na rovinu tvořenou vektory  $\mathbf{r}_i$  a  $\mathbf{p}_i$ , jeho  $z$  - tovou složku pak vypočteme (obrázek b):

$$l_{i,z} = l_i \sin \theta = (r_i \sin \theta) (\Delta m_i v_i) = r_{i\perp} \Delta m_i v_i$$

Celkový moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího okolo pevné osy je pak dán vztahem:

$$L_z = \sum_{i=1}^n l_{i,z} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i r_{i\perp} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i (\omega r_{i\perp}) r_{i\perp} = \omega \left( \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{i\perp}^2 \right)$$

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_{i\perp}^2 \rightarrow \boxed{L = \omega I}$$



## Moment hybnosti izolovaného systému se zachovává.



Celkový moment hybnosti izolovaného systému je konstantní, tedy platí **zákon zachování celkového momentu hybnosti**.

$$L = \text{konstanta}$$

Pro situaci na obrázku platí mezi celkovým momentem hybnosti rotujícího cvičence s činkami v rozpažených rukách a celkovým momentem hybnosti cvičence s činkami na hrudníku:



$$\omega_i I_i = \omega_f I_f$$