



# Mechanické vlnění.

**Přednášející:**

**RNDr. František Adamec, CSc.**

**Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích**

**Na základě učebnic:**

**Halliday, Resnick**

**Fundamentals of Physics 8<sup>th</sup> Edition, Wiley 2005**

**Feynman, Leighton, Snads**

**Feynmanovy přednášky z fyziky**

**Fragment 2000**

# Vlna.

**Vlnění** je periodicky se opakující porucha zachovávající se v prostoru a v čase (tvar, perioda), šířící se prostorem konstantní rychlostí. Vlnění přenáší energii. Šíření vln popisuje vlnová rovnice.

## Mechanické vlnění

šíření mechanické poruchy hmotným prostředím ( vzduchem, vodou, pevnými látkami). Příkladem jsou zvukové vlny, seismické vlny atd.

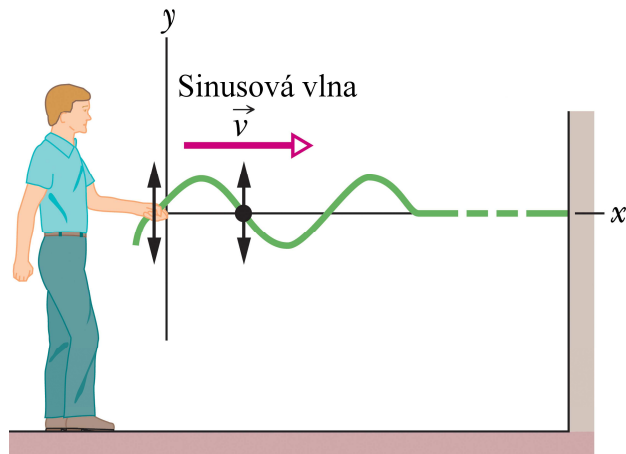
## Elektromagnetické vlnění

šíření elektromagnetické poruchy prostorem (hmotným prostředím a vakuem). Šíření elektromagnetických vln se řídí Maxwellovými rovnicemi. Příkladem elektromagnetických vln jsou radiové vlny, x-paprsky,  $\gamma$  paprsky, světlo. Elektromagnetické vlny se šíří konstantní rychlostí. Ve vakuu je rychlost šíření elektromagnetických vln  $c = 300,000 \text{ kms}^{-1}$ .

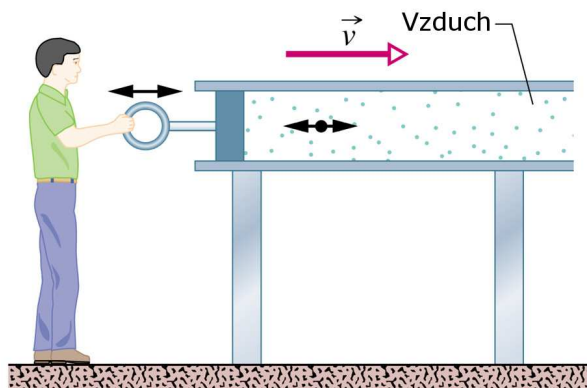
## Hmotné vlnění

Všechny elementární částice (electrony, protony, neutrony, atomy) jsou spojeny se šířením vlny, řídí se Schroedingerovou rovnicí.

## Příčné a podélné vlnění.



Nejjednodušším příkladem vlnění je jednoduchý pulz nebo sinusová vlna šířící se po napnutém laně vyvolaná opakovaným pohybem ruky střídavě nahoru a dolů. Libovolný bod vybraný na laně se pohybuje střídavě nahoru a dolů podle toho, jak se vlna šíří po laně. Amplituda pohybu vybraného bodu je kolmá na směr šíření vlny nebo pulzu. Takové vlnění označujeme jako **příčné (transverzální) vlnění**.

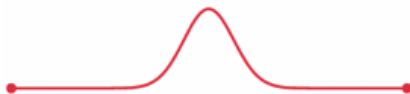
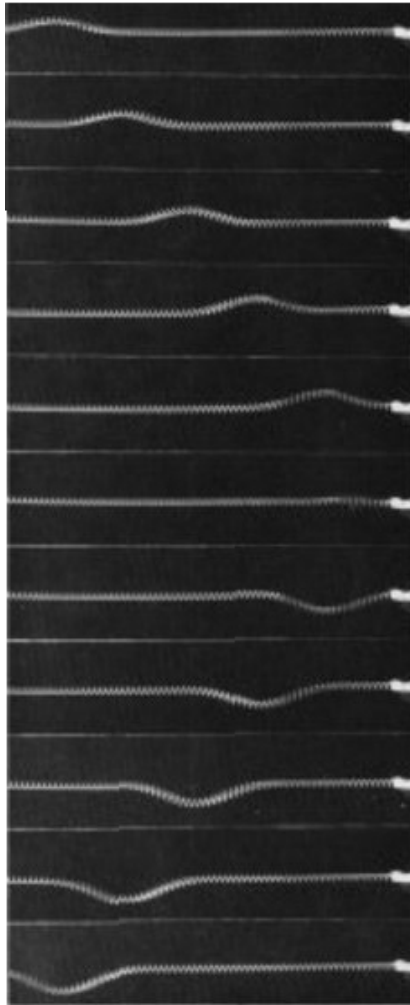


Zvuk je příkladem mechanického vlnění šířícího se hmotným prostředím – vzduchem. Mechanické vlnění vzduchu lze vyvolat například periodicky opakovaným pohybem pístu ve válci. Pohyb pístu vyvolá periodicky se opakující změny tlaku, šířící se ve směru pohybu pístu. Amplituda vlny se tedy mění ve směru šíření vlny, takové vlnění označujeme jako **podélné (longitudiální) vlnění**.

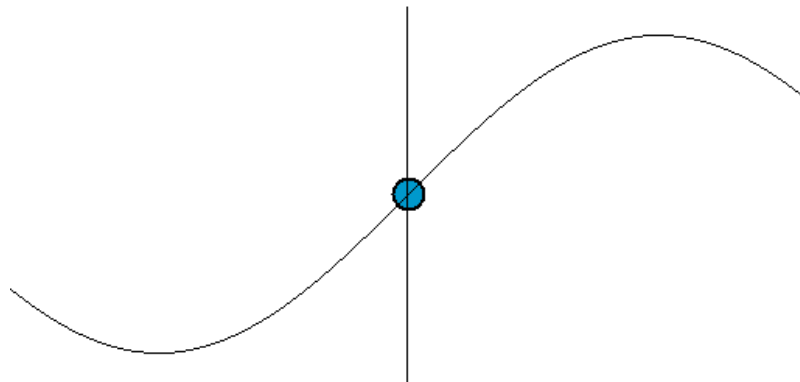
Jak příčné tak podélné vlny označujeme jako **postupné vlny**.

## Příčné vlnění – příklady.

Šíření pulzu.

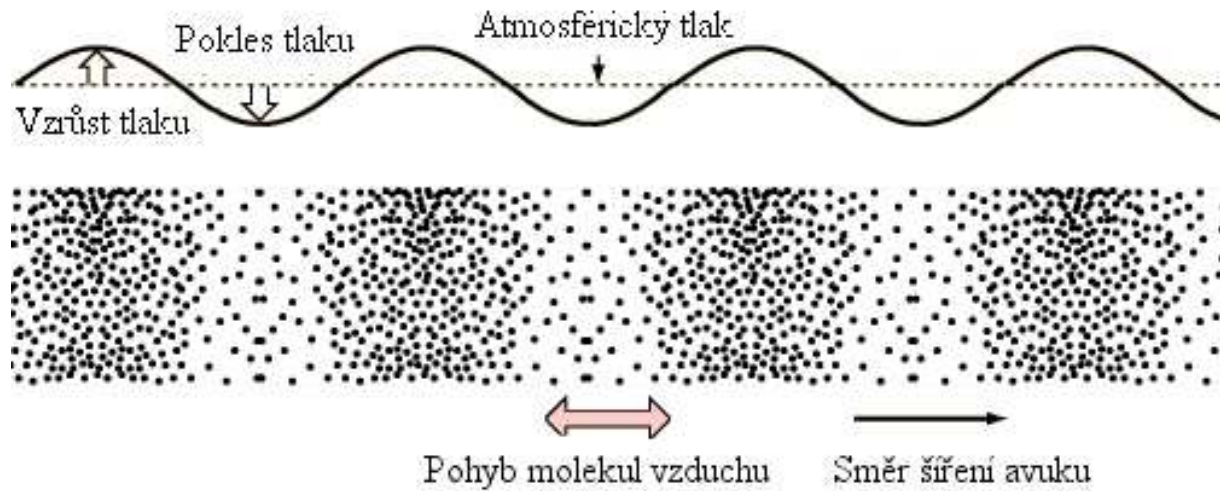


Šíření sinové vlny.



## Podélné vlnění - příklady.

Šíření podélné zvukové vlny.



Šíření podélné deformační vlny.



## Vlnová rovnice.

Šíření postupné vlny popisuje tzv. **vlnová rovnice**. Řešení splňující vlnovou rovnici hledáme ve tvaru  $y = h(x,t)$ , výchylka  $y$  musí být funkcí nejen času  $t$ , ale současně také souřadnice  $x$ . Funkce  $h(x,t)$  může být obecně libovolná, musí však splňovat podmínku  $h(x-vt) = h((x+\Delta x) - v(t+\Delta t))$ , kde  $v$  je rychlost šíření postupné vlny. Řešením jsou zpravidla harmonické funkce **sin**, **cos**,  $e^{ix}$ . Řešení vlnové rovnice pro jednoduchý příklad vlny pohybující se po napnutém laně je ve tvaru:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Amplituda  
Výchylka  
Oscilující část  
Fáze  
Vlnové číslo  
Souřadnice  
Čas  
Úhlová frekvence

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

Amplituda  $y_m$  je absolutní hodnota maximální výchylky vybraného bodu z rovnovážné polohy.

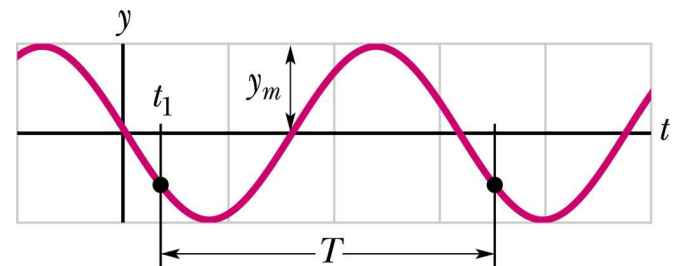
Fáze  $(kx - \omega t)$  se lineárně mění s časem, toho znamená, že hodnota oscilující části řešení vlnové rovnice bude nabývat hodnot mezi -1 a +1, včetně. Výchylka z rovnovážné polohy pak bude nabývat hodnot mezi  $-y_m < y(x,t) < y_m$ .

## Perioda, kruhová frekvence.

Položíme-li  $x = x_0 = 0$ , pak je  $y(0,t)$ , pouze funkcí času  $y(0,t) = y_m \sin(\omega t)$ . Ptáme se, po jaké době  $T$  se bude v námi zvoleném bodě  $x_0$  opakovat stejná výchylka:

$$y(0,t) = y(0,t+T)$$

Funkce pro něž platí uvedená podmínka nazýváme **periodické funkce**. Dobu  $T$  označujeme jako **periodu funkce**. Výchylka harmonické vlny je periodickou funkcí času s periodou  $T$ . Veličinu  $\omega$  nazýváme **kruhovou frekvencí** vlnění.



Z rovnice (viz. obrázek):  $-y_m \sin(\omega t_1) = -y_m \sin \omega(t_1 + T) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T)$

a vlastností funkce sinus vyplývá pro **kruhovou frekvenci** vztah:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

**Kruhová frekvence** je nejkratší doba opakování stejné výchylky v daném bodě  $x_0$ .

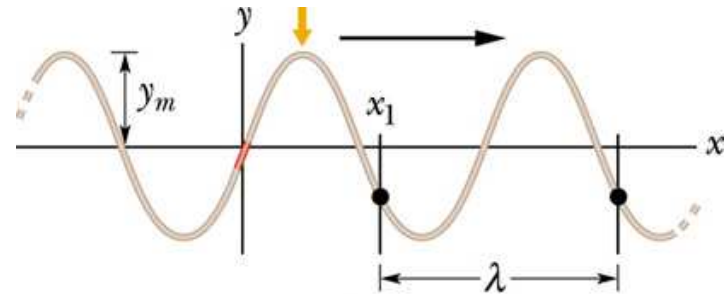
Výraz  $f = \frac{1}{T}$  označujeme jako **frekvenci** vlny.

## Vlnová délka.

Položíme-li  $t = t_0 = 0$ , pak je výchylka vlny  $y(x,0)$ , pouze funkcí polohy  $y(x,0) = y_m \sin(kx)$ . Ptáme se nyní po minimální vzdálenosti  $\lambda$  oddělující v daném čase  $t_0$  místa se stejnou fází, tedy stejnou výchylkou:

$$y(x, 0) = y(x + \lambda, 0)$$

Uvedená podmínka znamená, že funkce pro níž je tato rovnice splněna je **periodickou funkcí polohy**, souřadnice. Tuto vzdálenost označujeme **vlnová délka**  $\lambda$ .



Z rovnice  $y_m \sin(kx_1) = y_m \sin k(x_1 + \lambda) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda)$  a vlastností funkce sinus pro  $\lambda$  vyplývá:

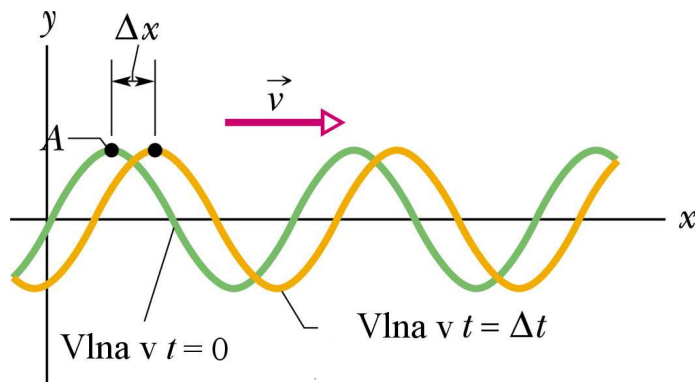
$$k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Veličinu  $k = 2\pi/\lambda$  nazýváme **vlnové číslo**.

Mezi **periodou** a **vlnovou délkou** platí vztah:  $\lambda = vT$ , kde  $v$  je fázová rychlost vlnění

**Vlnová délka** je vzdálenost do níž postoupí fáze vlny během jedné periody.

## Rychlost postupné vlny.



Libovolně zvolený bod (bod  $A$  na obrázku) na vlně šířící se v kladném směru osy  $x$  se za časový interval  $\Delta t$  posune o vzdálenost  $\Delta x$ . Výchyly bodu  $A$  v místě  $x$  a  $x + \Delta x$  jsou stejné, to znamená, že jsou ve stejné fázi a platí  $kx - \omega t = \text{konstanta}$ . Rychlost s níž se zvolený bod pohybuje je rychlost šíření fáze postupné vlny.

Derivací rovnice  $kx - \omega t = \text{konst.}$  získáme vztah pro fázovou rychlost šíření postupné vlny:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Rovnice  $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$  je rovnicí vlny šířící se v kladném směru osy  $x$ , postupná vlna šířící se v záporném směru osy je dáno rovnicí  $y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ .

Obecná rovnice postupné sinové vlny šířící se v libovolném směru osy  $x$  a s libovolnou hodnotou počáteční fáze  $\phi$  v čase  $t = 0$ :

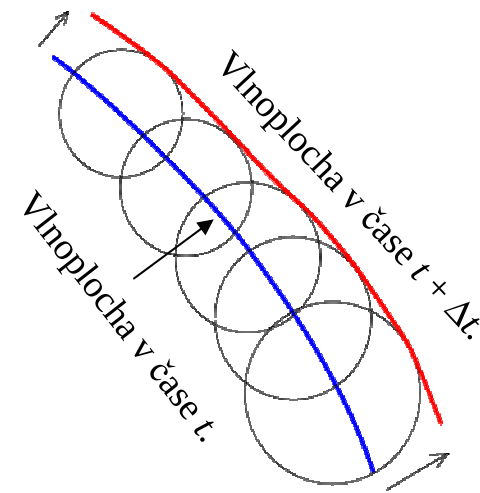
$$y = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

Pro obecnou funkci pak:

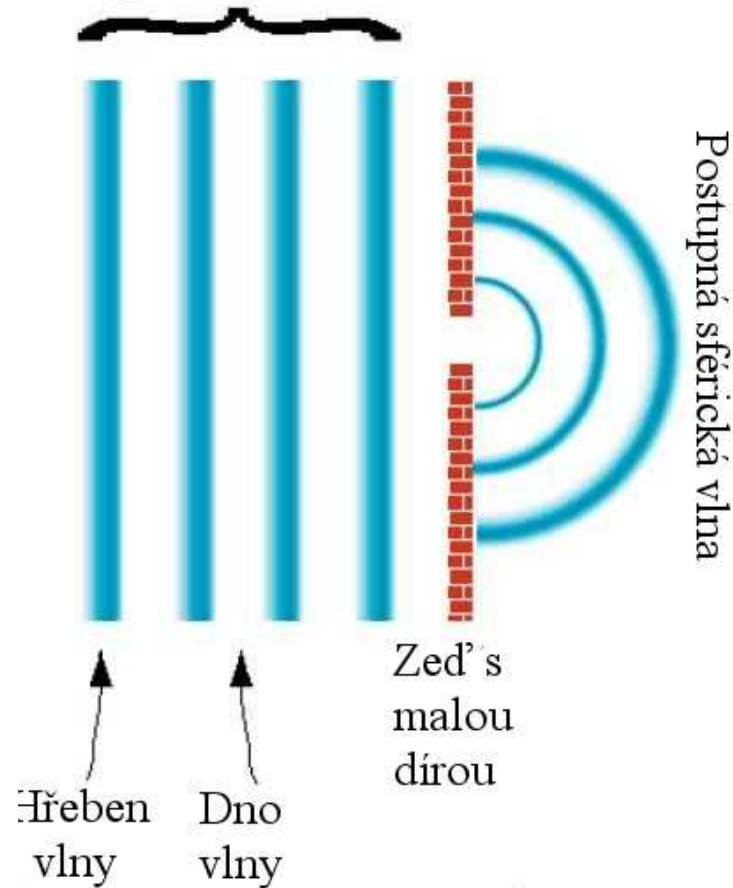
$$y = h(kx \pm \omega t + \phi)$$

## Vlnoplocha, rovinná a sférická vlna.

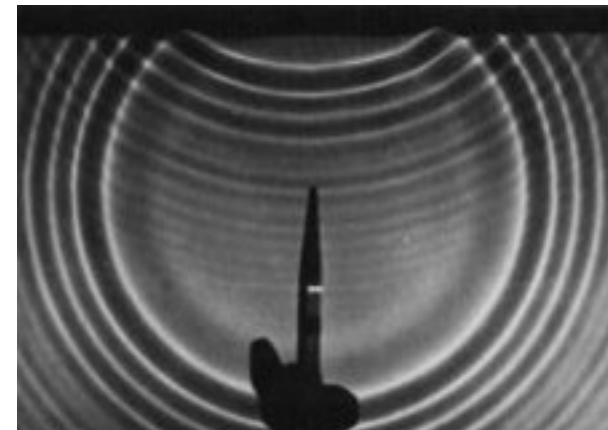
Vlnoplocha je myšlená přímka nebo plocha spojující body postupující vlny do nichž vlna dospěla ve stejném okamžiku a které mají stejnou fázi. Soubor míst v prostoru se stejnou fází do nichž vlnění dospěje téměř okamžiku nazýváme **čelní vlnoplochou** (čelem vlny).



Postupná rovinná vlna



Podle geometrického tvaru vlnoplochy hovoříme o **rovinné** a **sférické vlně**. Postupnou vlnu můžeme považovat za rovinnou ve velké vzdálenosti od zdroje vlnění, zatímco v blízkosti zdroje vlnění je třeba uvažovat vlnu jako sférickou.



## Různé tvary funkcí popisující postupnou vlnu.

$$y = y_m \sin(kx \pm \omega t \pm \phi)$$

$$y = y_m \cos(\omega t \pm kx \pm \phi)$$

Vlnovou funkci lze velmi výhodně zapsat za použití komplexní symboliky:

$$y = y_m e^{i(kx \pm \omega t \pm \phi)}$$

Jelikož platí vztahy:  $Ae^{ix} = A(\cos x + i \sin x) = \operatorname{Re}(x) + i \operatorname{Im}(x)$

$$\operatorname{Re}(x) = A \cos x, \quad \operatorname{Im}(x) = A \sin(x)$$

Jako vlnovou funkci pak bereme reálnou část komplexního čísla:

$$\operatorname{Re} A e^{i(kx \pm \omega t \pm \phi)}$$

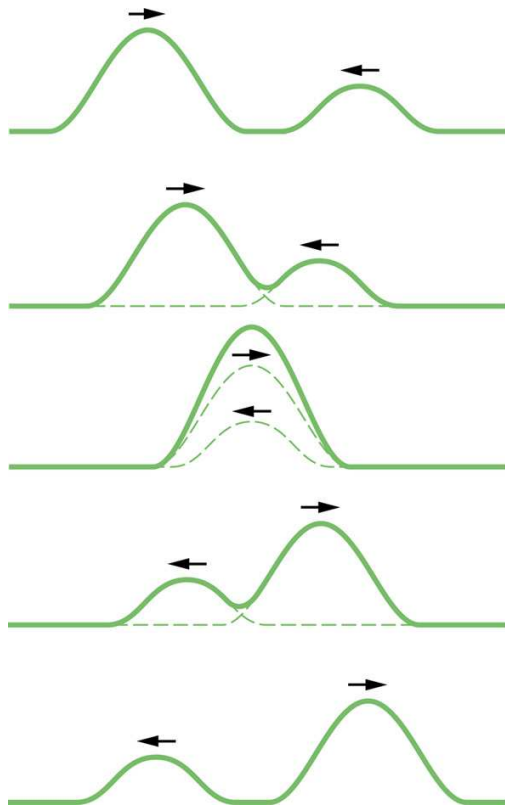
Obecnou funkci  $h(x,t)$  (například puls) splňující vlnovou rovnici pak zapíšeme:

$$y = h(kx \pm \omega t \pm \phi)$$

## Princip superposice.

Vlnová rovnice  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

je lineární diferenciální rovnice. Jsou-li  $y_1(x,t)$  a  $y_2(x,t)$  dvě různá řešení vlnové rovnice, pak je řešením též  $y'(x,t) = c_1 y_1(x,t) + c_2 y_2(x,t)$ ,  $c_1$  a  $c_2$  jsou konstanty. Princip superposice je přímým důsledkem linearit vlnové rovnice.

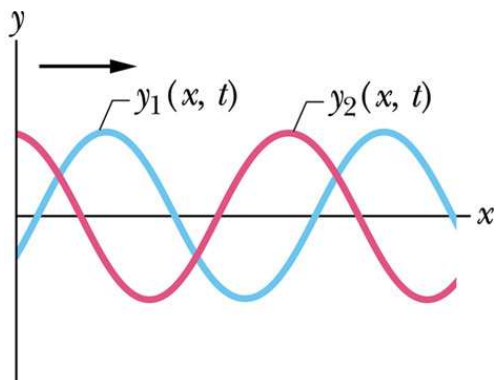


Dva pulsy  $y_1(x,t)$  a  $y_2(x,t)$  šířící se proti sobě se v prostoru v bodě  $P$  vzájemně překryjí. Funkce  $y_1(x_P,t)$  a  $y_2(x_P,t)$  určují výchylku jednotlivých pulsů v bodě  $P$ . Celková výchylka v bodě v okamžiku setkání obou pulsů je dána součtem  $y'(x_P,t) = y_1(x_P,t) + y_2(x_P,t)$ . Z platnosti principu superposice též vyplývá, že překrývající se vlny se vzájemně neovlivňují!

## Princip superpozice

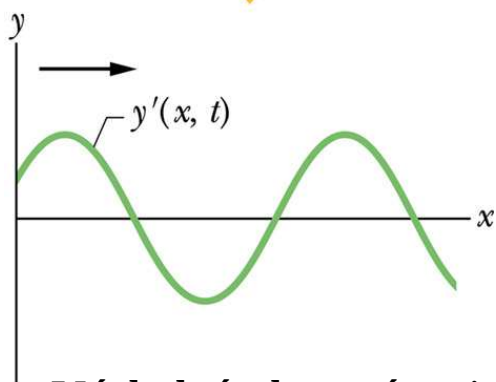


## Skládání vln - interference vlnění.



Uvažujme dvě harmonické vlny  $y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$  a  $y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$  šířící se napnutou strunou ve směru osy  $x$ . Obě vlny mají stejnou amplitudu, vlnovou délku a je mezi nimi fázový rozdíl  $\phi$ . Při setkání obou vln bude výsledné vlna šířící se strunou podle principu superposice dána součtem obou vln  $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ . Říkáme, že vlny spolu **interferují**. Výsledek interference obou vln pak závisí na vzájemném fázovém rozdílu vln:

$$y' = y_1(x, t) + y_2(x, t, \phi)$$

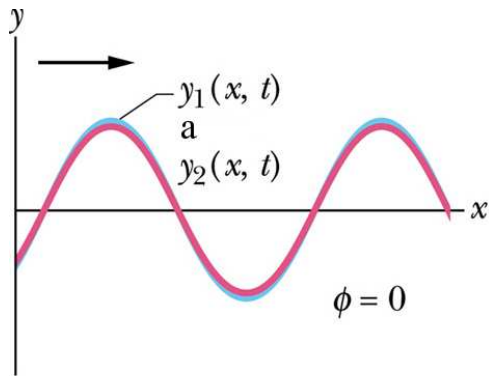


$$y'(x, t) = \left[ 2y_m \cos \frac{1}{2} \phi \right] \sin \left( kx - \omega t + \frac{1}{2} \phi \right)$$

Výsledná vlna má stejnou frekvenci jako původní vlny, její fáze je  $\phi/2$ . Amplituda je však závislá na fázovém rozdílu mezi oběma původním vlnami:

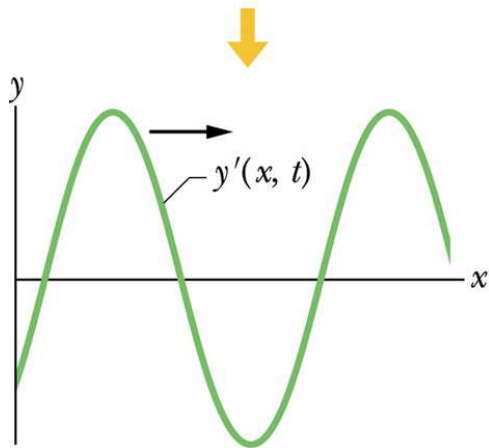
$$y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$$

## Konstruktivní interference.



Amplituda dvou interferujících vln  $y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$   
nabývá maximální hodnoty je-li  $\phi = 0$ , pak platí

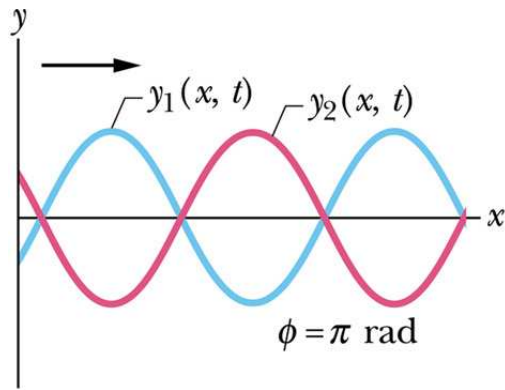
$$y'_m = 2y_m$$



Výsledná výchylka dvou konstruktivně interferujících vln je dána vztahem:

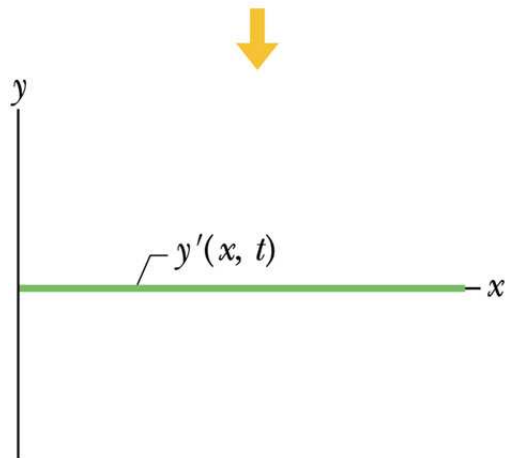
$$y'(x, t) = [2y_m] \sin \left( kx - mt + \frac{\phi}{2} \right)$$

## Destruktivní interference.



Amplituda dvou interferujících vln  $y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$   
nabývá minimální hodnoty je-li  $\phi = \pi$ , pak platí

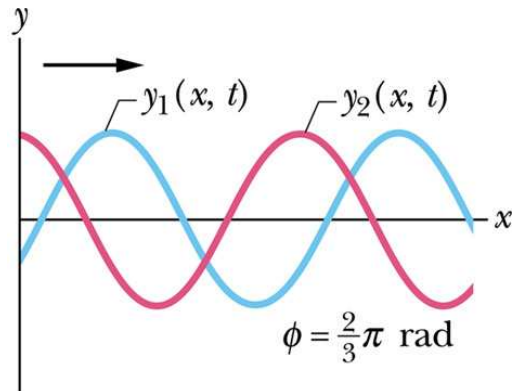
$$y'_m = 0$$



Výsledná výchylka dvou konstruktivně interferujících  
vln je:

$$y'(x, t) = 0$$

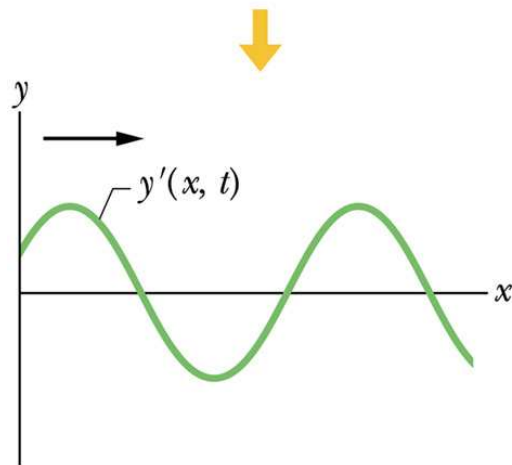
## Interference vln s fázovým rozdílem $\phi = 2\pi/3$ .



V případě, kdy fázový rozdíl mezi interferujícími vlnami je  $\phi = 2\pi/3$  je amplituda výsledného součtu rovna amplitudě jednotlivých vln. Platí tedy:

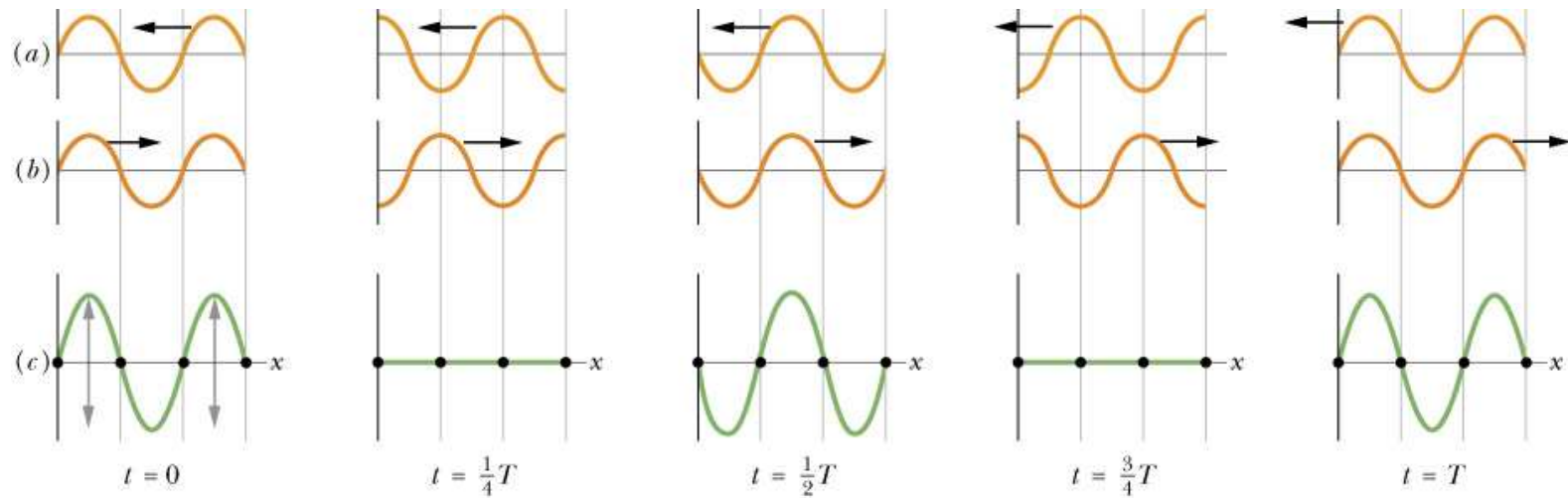
$$y'_m = y_m$$

$$y'(x, t) = [y_m] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$



Fázový rozdíl mezi interferujícími vlnami se často také vyjadřuje v násobcích vlnové délky. Platí, že fázový rozdíl  $2\pi$  radiánu  $= 1\lambda$ .

## Stojaté vlnění.



Výsledkem interference dvou vln stejné amplitudy a frekvence šířících se ve vzájemně opačném směru podél osy  $x$ , je **stojatá vlna**. Vezměme dvě vlny stejné amplitudy a stejné frekvence šířící se v proti sobě osy  $x$ :

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

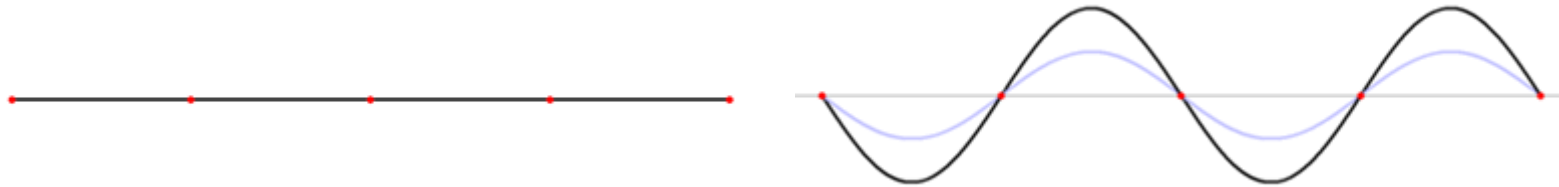
Podle principu superposice je výsledná vlna je součtem obou vln:

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

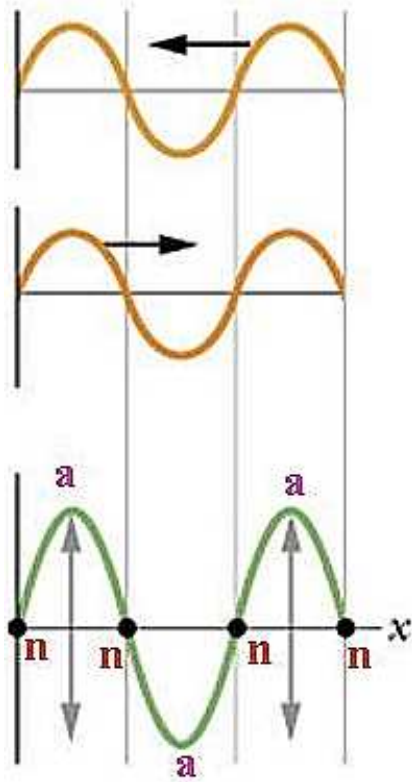
Výchylka výsledné vlny pak je:

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Výsledná vlna již není postupná, nýbrž stojatá, její amplituda je však závislá na souřadnici  $x$ .



## Uzly a kmitny.



Ze vztahu pro výchylku stojaté vlny:

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Vyplývá, že amplituda stojaté vlny je funkcí souřadnice  $x$ :

$$[2y_m \sin kx]$$

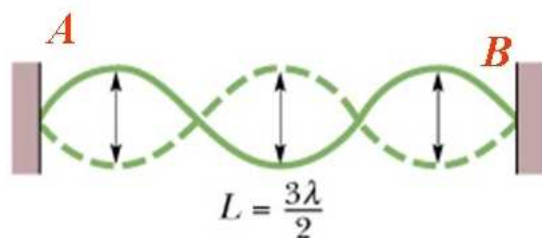
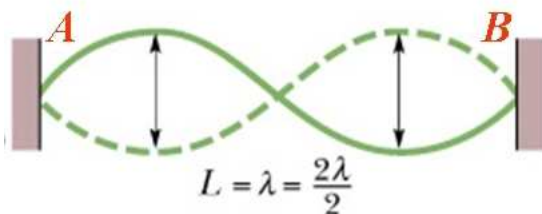
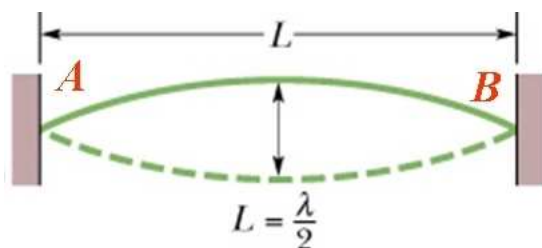
Jako **uzlové body (uzly)** označujeme takové hodnoty souřadnic v nichž je amplituda stojaté vlny nulová. Pro uzlové body platí podmínka  $kx = n\pi$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tedy, pro  $x$  platí:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}; n = 0, 1, 2, \dots$$

**Kmitny** jsou naopak místa, v nichž je amplituda stojaté vlny maximální. Pro hodnoty souřadnic v nichž je amplituda stojaté vlny maximální platí podmínka  $kx = (n + 1/2)\pi$ , kde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Tedy, maxima nastanou v místech o souřadnicích  $x$ :

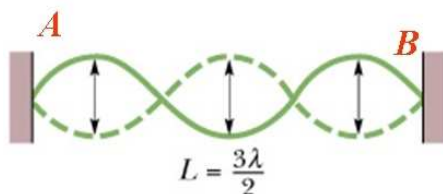
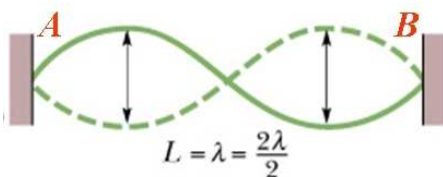
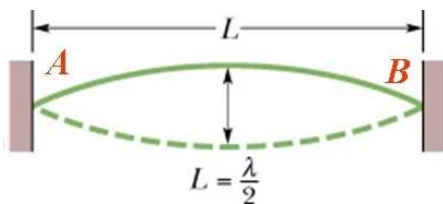
$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \rightarrow x'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}; n = 0, 1, 2, \dots$$

## Stojaté vlnění a rezonance.



Uvažujme strunu upevněnou na obou koncích v místech **A** a **B** ležících ve vzdálenosti **L**. Harmonická postupná vlna vyslaná z bodu **A** ve směru k bodu **B** se v bodě **B** odrazí a šíří se zpět k bodu **A**, v bodě **A** se opět odrazí a šíří se směrem k bodu **B**. Tímto procesem vznikne velké množství vzájemně se překrývajících postupných vln, z nich polovina se šíří směrem k bodu **B** a polovina zpět k bodu **A**.

Pro určité frekvence postupných vln vzniknou stojaté vlny. Říkáme, že tyto stojaté vlny jsou v **rezonanci**. Frekvence postupných vln, pro něž dojde ke vzniku stojaté vlny označujeme jako **rezonanční frekvence** mechanického systému.



Rezonance nastane v případě, že stojatá vlna splňuje tzv. **hraniční podmínky**. V případě struny upevněné na obou koncích vzájemně vzdálených o  $L$  požadujeme, aby amplituda stojaté vlny byla nulová. Tato hraniční podmínka vyplývá z toho, že struna se na koncích nesmí pohybovat, je pevně ukotvena v bodech  $A$  a  $B$ . Na prvním obrázku má stojatá vlna dva uzly v bodech  $A$  a  $B$ . Platí:

$$L = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2L$$

Na druhém obrázku má stojatá vlna tři uzly a platí:

$$L = 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda \rightarrow \lambda = L$$

V třetím případě má stojatá vlna čtyři uzly, v tomto případě platí:

$$L = 3\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{3\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}L$$

Obecný vztah pro rezonanční vlnovou délku a rezonanční frekvenci:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## Grupová rychlost.

Superpozicí vln stejné amplitudy, ale různé periody a vlnové délky získáme vlnu, jejíž průběh bude výrazně složitější než v případě skládání vln stejné amplitudy, periody a vlnové délky. Sečteme dvě vlny:

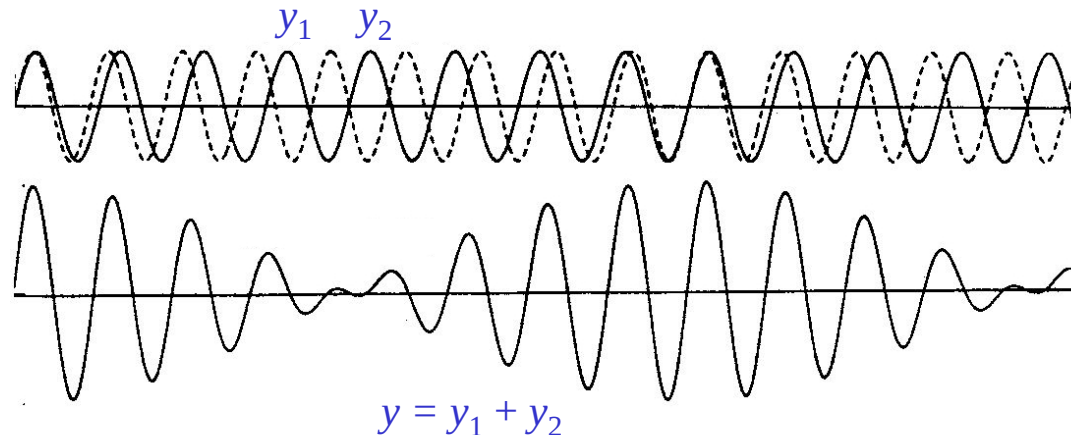
$$y_1 = y_m \sin(k_1 x - \omega_1 t), \quad y_2 = y_m \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$y = y_m \sin(k_1 x - \omega_1 t) + y_m \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Po úpravě (vztah pro součet cosinů úhlů) získáme vztah pro součtovou vlnu:

$$y = 2y_m \sin\left(\frac{k_2 + k_1}{2}x - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$

kde:  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega, \quad k_1 - k_2 = \Delta k, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = k$



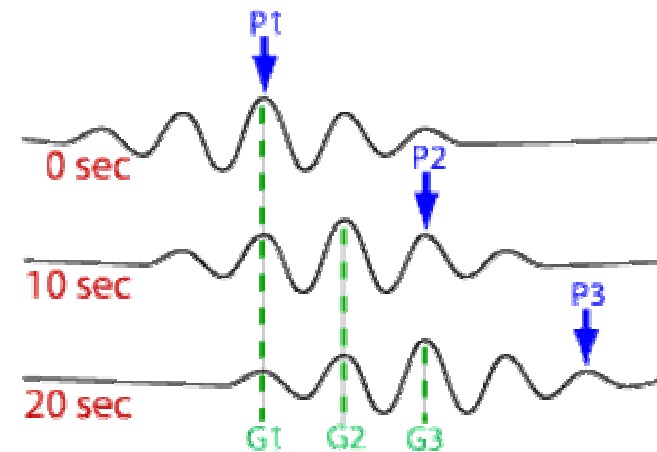
Fázová rychlost složené vlny je dána podílem střední kruhové frekvence  $\omega$  a středního vlnového čísla  $k$ .

$$v_{\text{fázová}} = \frac{\omega}{k}, \quad \text{kde } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

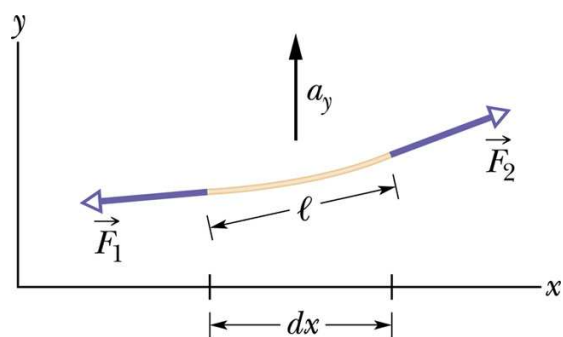
Rychlost šíření obálky složené vlny nazýváme **grupová rychlost**, je dána podílem rozdílů (diferenciálů  $d\omega$ ) kruhové frekvence  $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$  výchozích vln a rozdílů (diferenciálů  $dk$ ) vlnových čísel  $k_1 - k_2 = \Delta k$  výchozích vln. Grupová rychlost je menší než fázová. Energie nesená postupující vlnou se šíří grupovou rychlostí.

$$v_{\text{grupová}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \text{nebo} \quad v_{\text{grupová}} = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{kde } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta k = k_1 - k_2$$

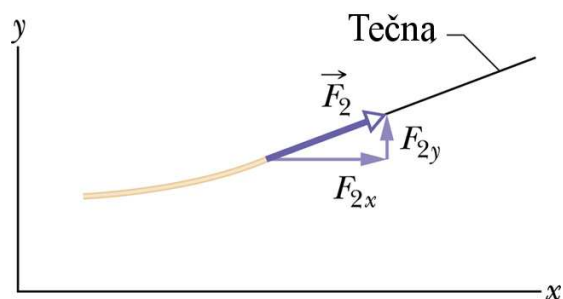
Rychlost šíření fáze s níž se pohybuje bod **P**, je dvojnásobkem rychlosti s níž se pohybuje vybraný bod grupy **G**.



## Vlnová rovnice pro vlnu šířící se napnutou strunou.



(a)



(b)

Uvažujme strunu napnutou silou  $F$ , která v rovnovážném stavu splývá s osou  $x$ . Lineární hustota struny je  $\mu$ . Při malém příčném vychýlení struny, se struna mírně prodlouží a vznikne v ní malé napětí, toto malé přídavné napětí a stejně tak prodloužení vzhledem k síle kterou je struna napnuta můžeme zanedbat. Na koncích vybraného malého úseku struny  $\Delta x$  hmotnosti  $\Delta m = \mu \Delta x$  působí síly napětí  $F_1$  a  $F_2$  tečné ke struně v koncových bodech délkového elementu  $\Delta x$  struny. Průměty obou sil  $F_1$  a  $F_2$  do směru osy  $x$  jsou prakticky stejné, ale opačně orientované, tudíž se navzájem vyruší,  $F_{1x} \approx F_{2x}$ . Element struny  $\Delta x$ , se při chvění struny pohybuje ve směru kolmém na strunu v klidu tj. ve směru osy  $y$ . a působí na něj ta složka výslednice sil

$F_1$  a  $F_2$  která je kolmá k ose  $x$ . Tato výslednice je dána rozdílem složek obou sil  $F_1$  a  $F_2$  ve směru osy  $y$ :

$$F_{\perp} = F_1 \sin \alpha_1 - F_2 \sin \alpha_2 \approx F_1 \alpha_1 - F_2 \alpha_2 \approx F_1 \tan \alpha_1 - F_2 \tan \alpha_2 \approx \tau (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

Uvedené vztahy vyplývají z platnosti následujících vztahů pro obě napěťové síly  $F_1$  a  $F_2$  a pro malé příčné vychýlení struny:

Velikosti obou sil jsou si rovny a zároveň jsou rovny napětí struny:  $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = \tau$

Tangenty obou úhlů jsou určeny derivacemi výchylky  $y(x,t)$  v čase  $t$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \ll 1 \rightarrow \sin \alpha_1 \simeq \tan \alpha_1 &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_1 \\ \alpha_2 \ll 1 \rightarrow \sin \alpha_2 \simeq \tan \alpha_2 &= \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 \end{aligned} \rightarrow F_{y,\text{net}} = \tau \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 - \left( \frac{dy}{dx} \right)_1 \right]$$

Rozdíl  $\left( \frac{dy}{dx} \right)_2 - \left( \frac{dy}{dx} \right)_1$  pro dostatečně malé  $\Delta x$  lze vyjádřit jako směrnici tečny ke

křivce  $f(x) = \left( \frac{dy}{dx} \right)$ , tedy  $\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$ . Pro kolmou složku výsledné síly pak

dostaneme vztah:

$$F_{\perp} = \tau \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_2 - \left( \frac{dy}{dx} \right)_1 \right] \approx \tau \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x$$

Pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon) pro vyšetřovaný úsek struny  $\Delta x$  je:

$$\Delta m \frac{d^2 y}{dt^2} = \mu \Delta x \frac{d^2 y}{dt^2} = \tau \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x$$

Po úpravě dostáváme vlnovou rovnici pro šíření postupné deformační vlny napnutou strunou:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\tau}{\mu} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Pro rychlost šíření deformační vlny napnutou strunou platí vztah:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\tau}{\mu}$$