

A black and white photograph of the Tacoma Narrows Bridge during its collapse. The bridge deck is shown in a dramatic, curved position, having tilted away from its supports. The suspension cables and towers are visible in the background. The scene is set against a backdrop of trees and a cloudy sky.

Tacoma Bridge, 1940

Kmitání

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Kmity - oscilace.

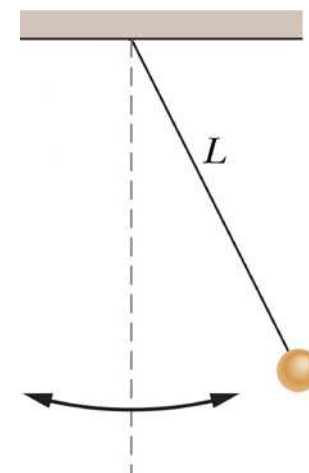
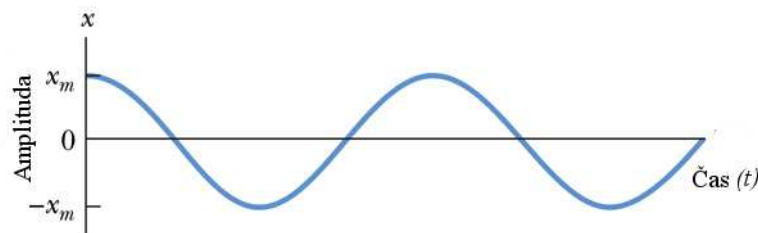
Kmitání - opakující se změna veličiny v čase. okolo rovnovážné polohy. Příkladem kmitů jsou pohyby planet + jakýkoliv pohyb po kruhové dráze, hodinové kyvadlo, chemické oscilace, elektrické kmity, periodické změny tlaku nebo hustoty v kapalině atd.

Z hlediska časového průběhu pohybu hovoříme o kmitech periodických (harmonický a anharmonický) a aperiodických. Z hlediska energie kmitajícího systému o kmitech tlumených a nucených.

Harmonické kmity.

Harmonické kmity - výchylka z rovnovážné polohy je harmonickou funkcí času. Jako harmonické označujeme goniometrické funkce sinus a cosinus:

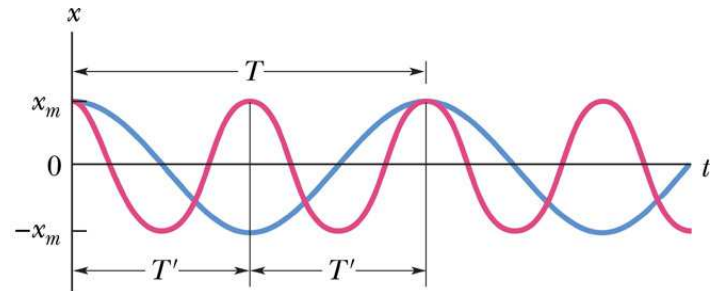
$$x(t) \approx \cos(\omega t + \phi), \quad x(t) \approx \sin(\omega t + \phi)$$



Veličiny charakterizující kmitání.

Perioda kmitání T je doba jednoho celého „oběhu“. Jednotkou periody je 1 sekunda. Počet opakování (period) za jednotku času nazýváme **frekvencí kmitání** f , jednotkou je 1 Hertz. Mezi frekvencí a periodou platí vztah:

$$f = \frac{1}{T}$$



Výchylka hmotného bodu - přemístění - je dána vztahem:

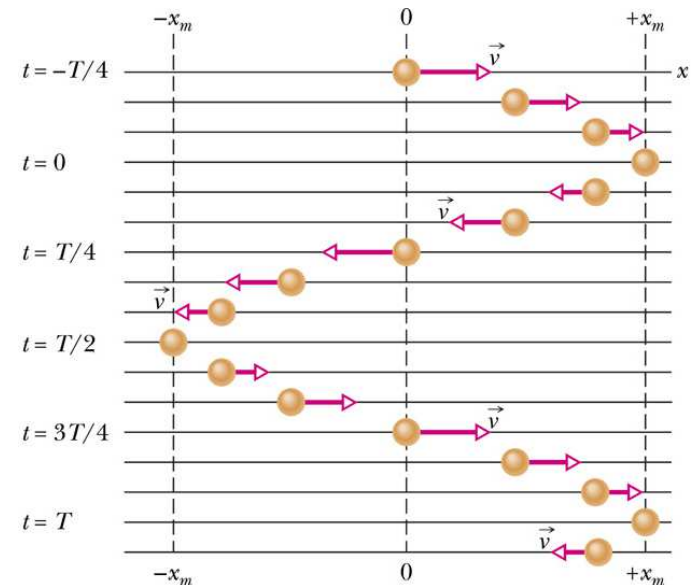
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Maximální výchylku (přemístění) harmonického pohybu x_m označujeme jako **amplitudu**.

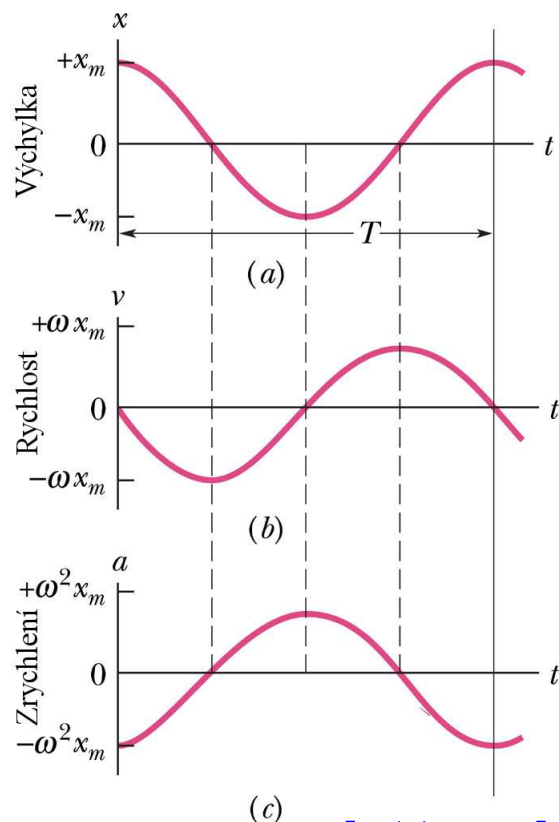
Veličina ω je **úhlová frekvence** harmonického pohybu, je dána rovnicí:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Veličina ϕ je **fázová konstanta** (fáze) kmitu, udává počáteční výchylku, to je $x(t)$ v čase $t = 0$. Její jednotkou je 1 radián.



Rychlost a zrychlení harmonických kmitů.



Velikost rychlosti harmonického pohybu je:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \phi)] = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

Veličina ωx_m je amplituda rychlosti harmonického pohybu. Je to maximální možná hodnota rychlosti harmonického pohybu $v(t)$. Na obrázku (b) je závislost rychlosti harmonického pohybu na čase t pro $\phi = 0$:

$$v(t) = -\omega x_m \sin \omega t$$

Velikost zrychlení harmonického pohybu je:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)] = -\omega^2 x_m \cos \omega t = -\omega^2 x$$

Veličina $\omega^2 x_m$ je velikost amplitudy zrychlení harmonického pohybu. Je to maximální možná hodnota velikosti zrychlení harmonického pohybu $a(t)$. Na obrázku (c) je závislost zrychlení harmonického pohybu na čase t pro $\phi = 0$:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$$

Energie harmonických kmitů.

Celková mechanická energie harmonického pohybu E je součtem potenciální a kinetické energie E_{pot} a E_{kin} .

Potenciální energie E_{pot} :

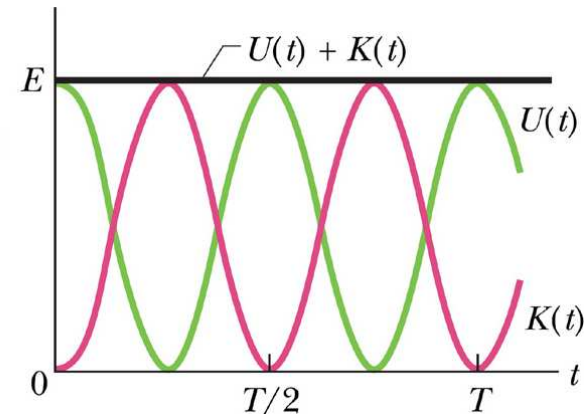
$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Kinetická energie E_{kin} :

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

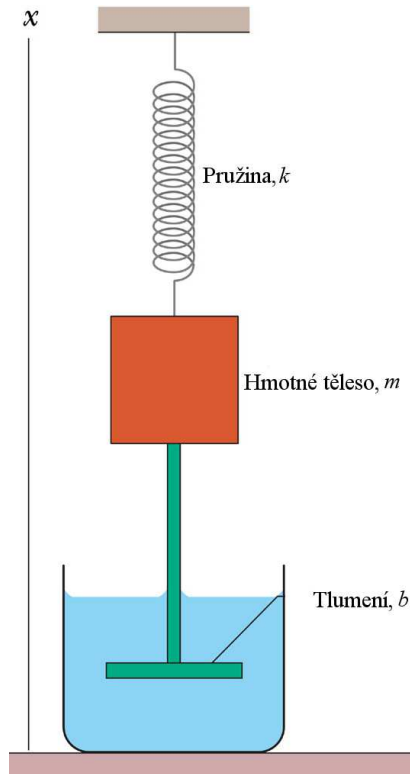
Celková mechanická energie E :

$$E = U + K = \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} kx_m^2$$



Celková mechanická energie harmonických kmitů je konstantní, potenciální a kinetická energie se však vzájemně „přelévají“.

Tlumené harmonické kmity.



Vnější odporující síla působící na kmitající systém, způsobuje postupné zmenšování amplitudy kmitu, tedy kmit je tlumen. Uvažujme tlumící sílu úměrnou rychlosti pohybu kmitajícího systému:

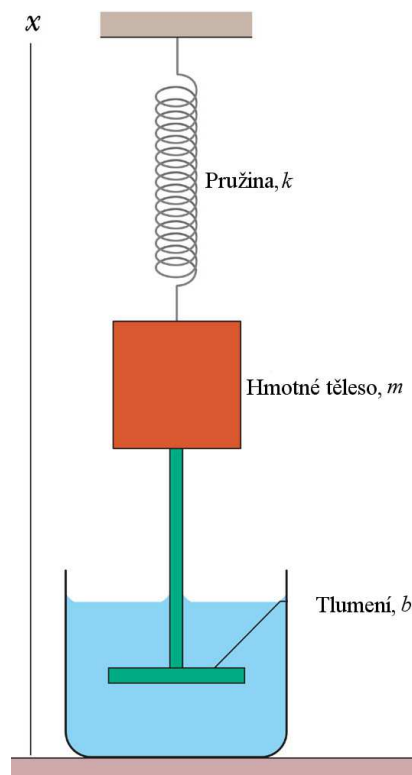
$$F_{\text{tlumení}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

Modelovým příkladem tlumeného kmitajícího mechanického systému je svisle zavěšená pružina konstanty tuhosti k k níž je připevněno těleso hmotnosti m jehož jedna část je ponořena do vany s kapalinou. Kapalina působí brzdicí silou $F_{\text{tlumení}}$ působící proti pohybu tělesa úměrnou rychlosti pohybu ponořené části tělesa v kapalině. Parametr b v rovnici pro sílu tlumení je tlumící konstanta. Výsledná síla působící na těleso je:

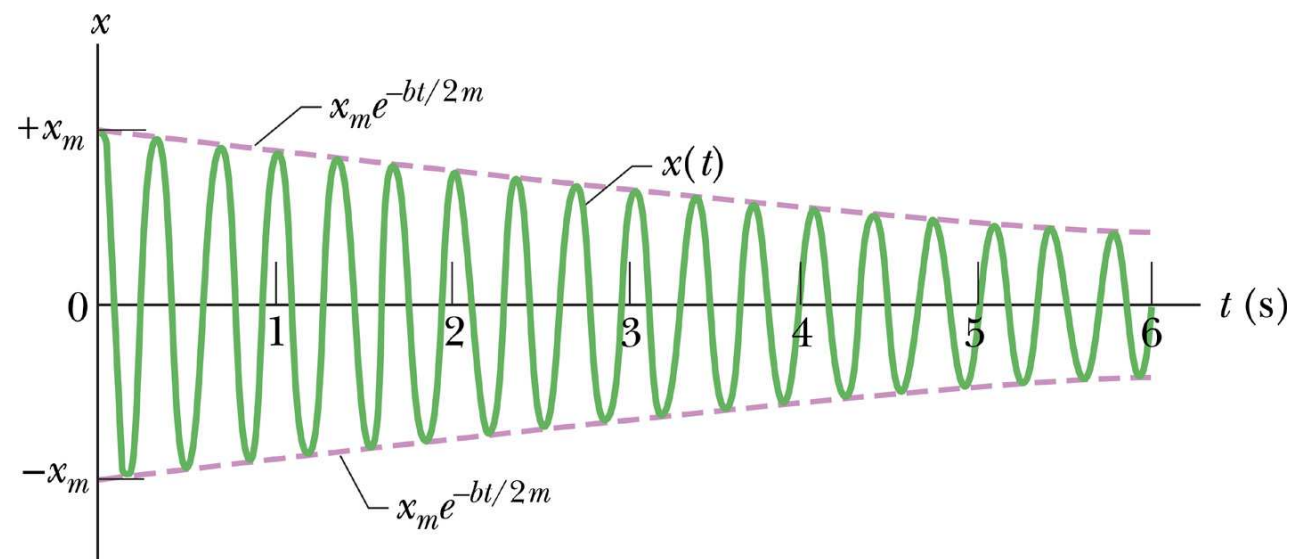
$$F_{\text{net}} = -kx - bv$$

Dosazením vztahu pro F_{net} do zákona síly dostaneme získáme pohybovou rovnici, jejímž řešením je vztah dávající výchylku z rovnovážné polohy v libovolném čase:

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$



Grafické znázornění řešení rovnice tlumeného harmonického pohybu:

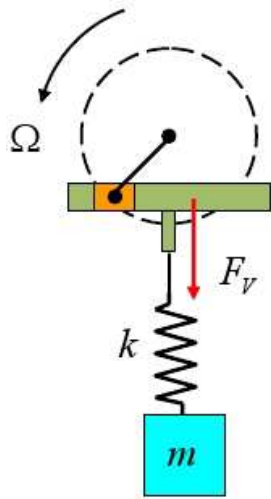


Člen $x_m e^{-bt/2m}$ je amplituda, $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ je kruhová frekvence tlumeného harmonického pohybu.

Energie tlumeného harmonického pohybu s rostoucím časem klesá. V případě slabého tlumení můžeme amplitudu x_m nahradit $x_m e^{-bt/2m}$, pro celkovou energii tlumeného harmonického pohybu pak platí:

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$

Nucené harmonické kmity a resonance.



Vynucené harmonickém kmitání je kmitání, kdy na kmitající systém působí vnější budící síla $F_{bud.}(t)$. Zákon síly má pak tvar:

$$F = ma = -kx + F_{bud.}(t)$$

Vnější budící síla může mít různé závislosti na čase. Nejjednodušší budící silou je harmonicky se měnící síla s kruhovou frekvencí Ω :

$$F_{bud.}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Řešením rovnice pro harmonicky se měnící budící sílu: $x = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$

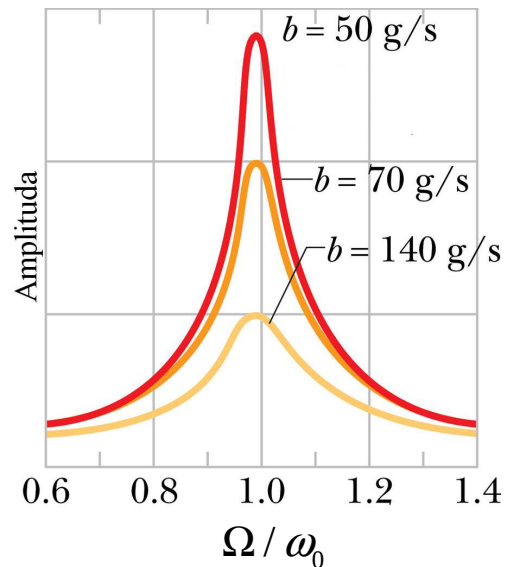
Oscilátor tedy kmitá se stejnou frekvencí jako budící síla, amplituda však závisí na frekvenci budící síly Ω a vlastní frekvenci volného harmonického oscilátoru ω_0 . Pokud by kruhová frekvence budící síly byla rovna vlastní frekvenci oscilátoru pak by amplituda kmitu byla nekonečná. To však není možné, vždy je přítomna nějaká tlumící síla. Tuto tlumící sílu je tedy třeba do výpočtu zahrnout.

Řešení rovnice $F = ma = -kx - bv + F_0 \cos(\Omega t)$ je ve tvaru:

$$y = Ae^{-bt} \cos(\omega_0 t + \delta_0) + A_v \sin(\Omega t + \gamma)$$

Řešení je součtem dvou členů. První člen odpovídá tlumenému harmonickému pohybu, druhý je pak příspěvkem budící síly. Amplituda A_v příspěvku budící síly je dána vztahem:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} \frac{F_0}{m}$$



Fáze budící síly je dána vztahem: $\text{tg } \gamma = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Amplituda A_v je závislá na frekvenci budící síly. Maximum amplitudy nastane je-li kruhová frekvence budící síly rovna kruhové frekvenci vlastních kmitů netlumeného harmonického oscilátoru.