



Mechanické vlnění.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Snads

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Co je ve fyzice vlnění.

Vlnění je periodicky se opakující porucha zachovávající se v prostoru a v čase (tvar, perioda), šířící se prostorem konstantní rychlostí. Vlnění přenáší energii. Šíření vln popisuje vlnová rovnice.

Mechanické vlnění

šíření mechanické poruchy hmotným prostředím (vzduchem, vodou, pevnými látkami). Příkladem jsou zvukové vlny, seismické vlny atd.

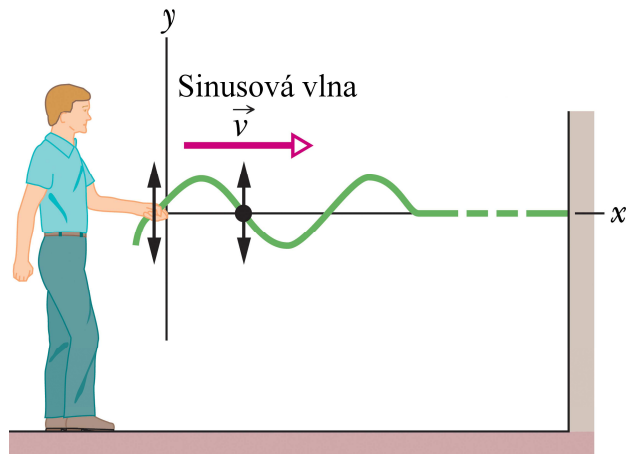
Elektromagnetické vlnění

šíření elektromagnetické poruchy prostorem (hmotným prostředím a vakuem). Šíření elektromagnetických vln se řídí Maxwellovými rovnicemi. Příkladem elektromagnetických vln jsou radiové vlny, x-paprsky, γ paprsky, světlo. Elektromagnetické vlny se šíří konstantní rychlostí. Ve vakuu je rychlost šíření elektromagnetických vln $c = 300,000 \text{ kms}^{-1}$.

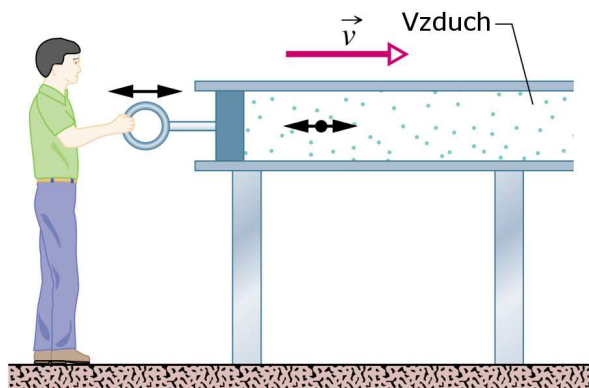
Hmotné vlnění

Všechny elementární částice (electrony, protony, neutrony, atomy) jsou spojeny se šířením vlny, řídí se Schroedingerovou rovnicí.

Příčné a podélné vlnění.



Nejjednodušším příkladem vlnění je jednoduchý pulz nebo sinusová vlna šířící se po napnutém laně vyvolaná opakovaným pohybem ruky střídavě nahoru a dolů. Libovolný bod vybraný na laně se pohybuje střídavě nahoru a dolů podle toho, jak se vlna šíří po laně. Amplituda pohybu vybraného bodu je kolmá na směr šíření vlny nebo pulzu. Takové vlnění označujeme jako **příčné (transverzální) vlnění**.

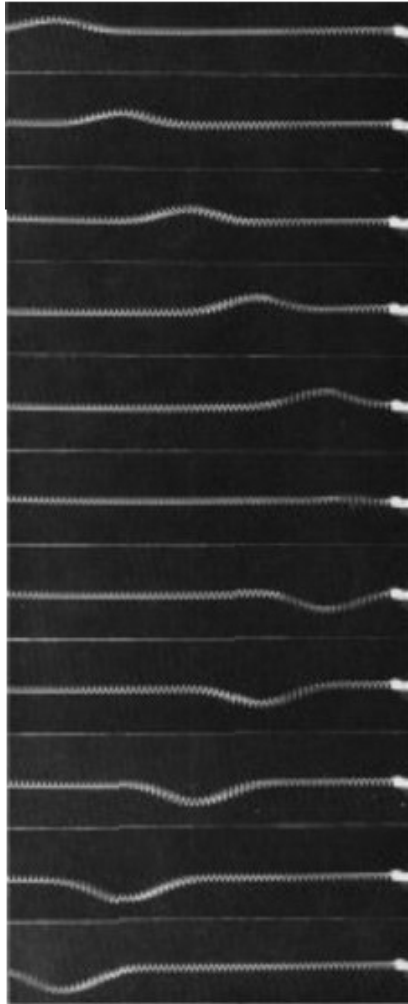


Zvuk je příkladem mechanického vlnění šířícího se hmotným prostředím – vzduchem. Mechanické vlnění vzduchu lze vyvolat například periodicky opakovaným pohybem pístu ve válci. Pohyb pístu vyvolá periodicky se opakující změny tlaku, šířící se ve směru pohybu pístu. Amplituda vlny se tedy mění ve směru šíření vlny, takové vlnění označujeme jako **podélné (longitudiální) vlnění**.

Jak příčné tak podélné vlny označujeme jako **postupné vlny**.

Příčné vlnění – příklady.

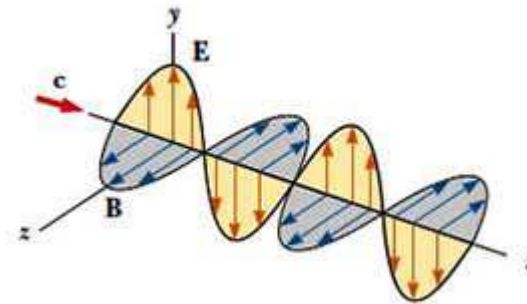
Šíření pulzu.



Šíření vlny na vodní hladině.

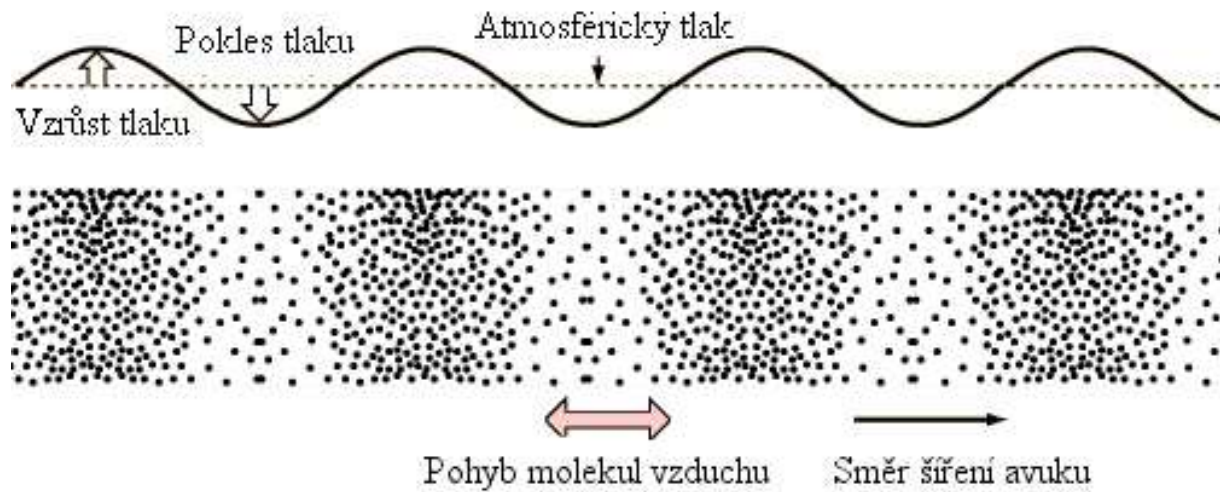


Šíření elektromagnetické vlny.



Podélné vlnění - příklady.

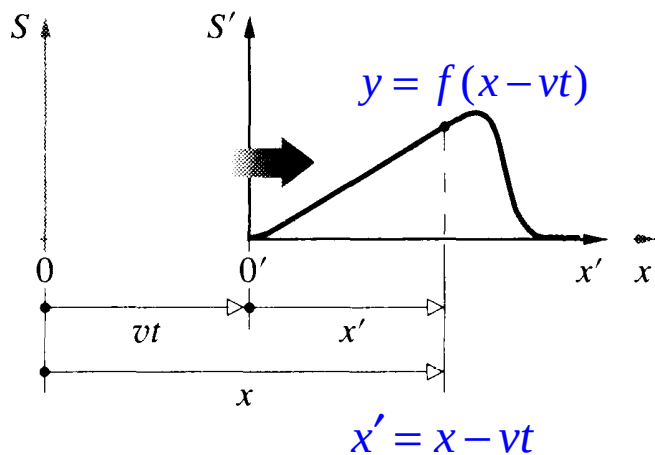
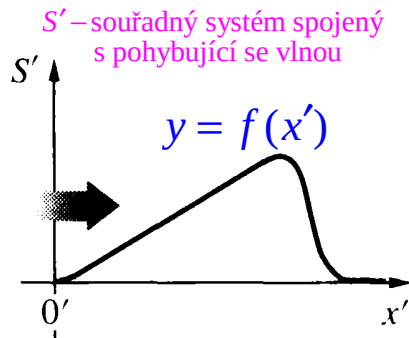
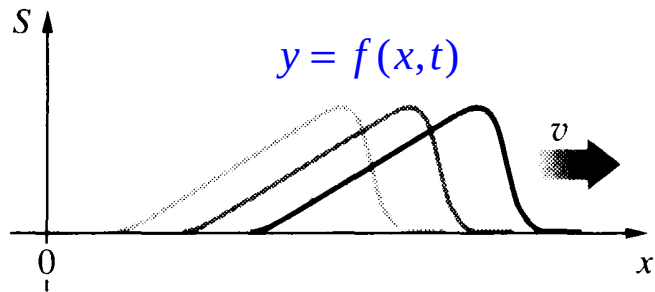
Šíření podélné zvukové vlny.



Šíření podélné deformační vlny.



Jak matematicky popsat vlnu.



Vlna se pohybuje v prostoru rychlostí v , musí tedy funkce f popisující vlnu být funkcí polohy (polohový vektor) a času, tedy tvaru $y = f(x, t)$ v případě pohybu ve směru osy x .

V čase $t = 0$, funkce $y = f(x, 0)$ popisuje geometrický tvar vlny.

Argument funkce $f(x, t)$ musí být v takovém tvaru, aby se při pohybu vlny zachovával její geometrický tvar.

Tento požadavek je splněn tehdy, když souřadnice a čas jsou vzájemně svázány vztahem $(x - vt)$.

Pak platí rovnice :

$$f[(x + v\Delta t) - v(t + \Delta t)] = f(x - vt)$$

Vlnová rovnice-pohybová rovnice vlnění.

Šíření postupné vlny v prostředí popisuje tzv. **vlnová rovnice**, řešeními vlnové rovnice jsou například funkce **sin**, **cos**, **e^{ix}**. Příkladem funkce popisující příčnou vlnu šířící se ve směru osy **x** je harmonické vlna :

$$y(x,t) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right)$$

Amplituda **y_m** je absolutní hodnota maximální výchylky vybraného bodu z rovnovážné polohy.

Fáze vlny (**kx-ωt**) se lineárně mění s časem, to znamená, že hodnota oscilující části řešení vlnové rovnice bude nabývat hodnot mezi -1 a +1, včetně.

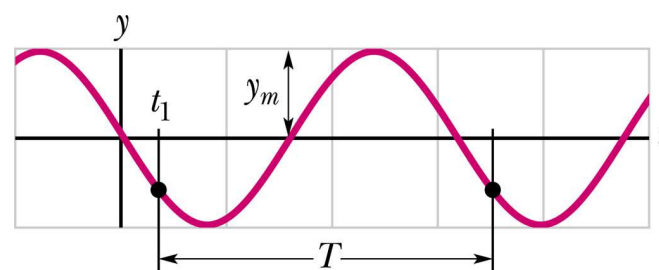
Výchylka z rovnovážné polohy pak bude nabývat hodnot mezi **-y_m < y(x,t) < y_m**.

Perioda, kruhová frekvence.

Položíme-li $x = x_0 = 0$, pak je $y(0,t)$, pouze funkcí času $y(0,t) = A_m \sin(\omega t)$. Ptáme se, po jaké době T se bude v námi zvoleném bodě x_0 opakovat stejná výchylka:

$$y(0,t) = y(0,t+T)$$

Funkce pro něž platí uvedená podmínka nazýváme **periodické funkce**. Dobu T označujeme jako **periodu funkce**. Výchylka harmonické vlny je periodickou funkcí času s periodou T . Veličinu ω nazýváme **kruhovou frekvencí** vlnění.



Z rovnice (viz. obrázek): $-y_m \sin(\omega t_1) = -y_m \sin \omega(t_1 + T) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T)$

a vlastností funkce sinus vyplývá pro **kruhovou frekvenci** vztah: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Kruhová frekvence je nejkratší doba opakování stejné výchylky v daném bodě x_0 .

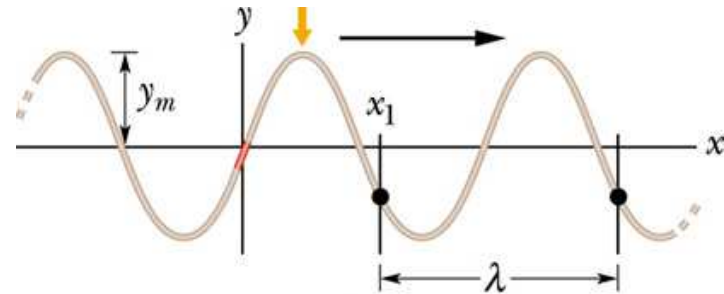
Výraz $f = \frac{1}{T}$ označujeme jako **frekvenci** vlny.

Vlnová délka.

Položíme-li $t = t_0 = 0$, pak je výchylka vlny $y(x,0)$, pouze funkcí polohy $y(x,0) = y_m \sin(kx)$. Ptáme se nyní po minimální vzdálenosti λ oddělující v daném čase t_0 místa se stejnou fází, tedy stejnou výchylkou:

$$y(x, 0) = y(x + \lambda, 0)$$

Uvedená podmínka znamená, že funkce pro níž je tato rovnice splněna je **periodickou funkcí polohy**, souřadnice. Tuto vzdálenost označujeme **vlnová délka** λ .



Z rovnice $y_m \sin(kx_1) = y_m \sin k(x_1 + \lambda) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda)$ a vlastností funkce sinus pro λ vyplývá:

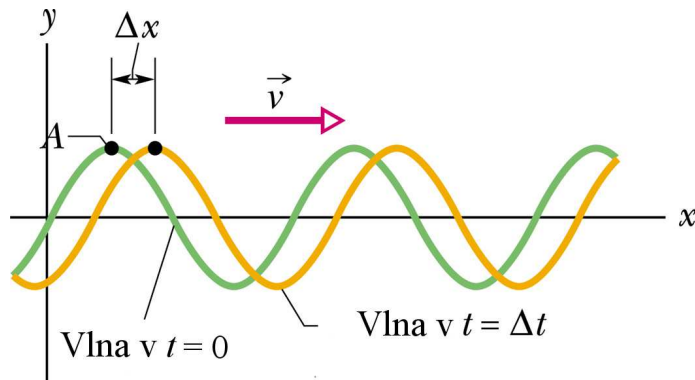
$$k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Veličinu $k = 2\pi/\lambda$ nazýváme **vlnové číslo**.

Mezi **periodou** a **vlnovou délkou** platí vztah: $\lambda = vT$, kde v je fázová rychlost vlnění

Vlnová délka je vzdálenost do níž postoupí fáze vlny během jedné periody.

Rychlost postupné vlny.



Libovolně zvolený bod (bod **A** na obrázku) na vlně šířící se v kladném směru osy x se za časový interval Δt posune o vzdálenost Δx . Výhylky bodu **A** v místě x a $x + \Delta x$ jsou stejné, to znamená, že jsou ve stejné fázi a platí $kx - \omega t = \text{konstanta}$. Rychlost s níž se zvolený bod pohybuje je rychlost šíření fáze postupné vlny.

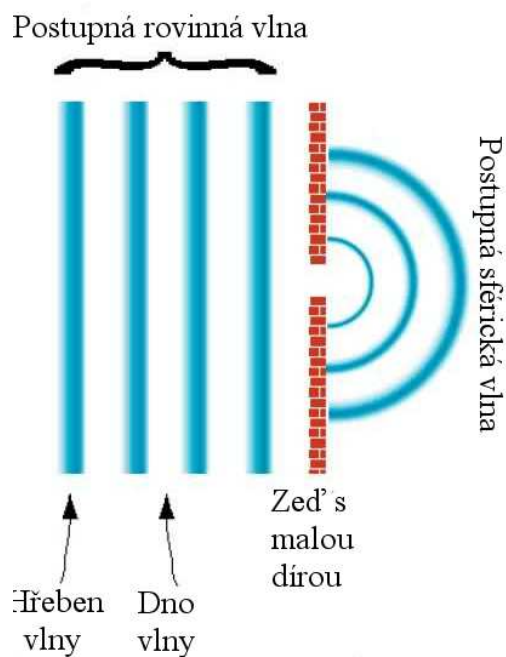
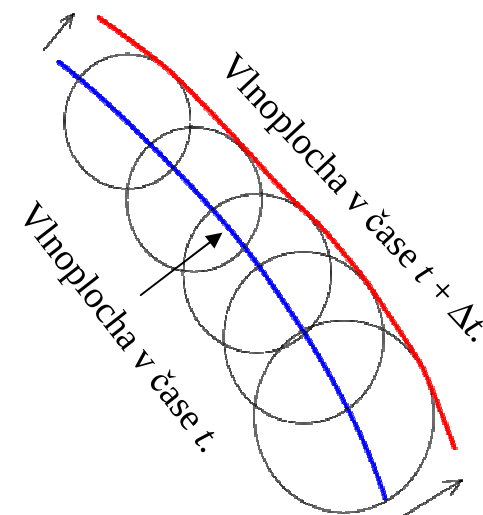
Derivací rovnice $kx - \omega t = \text{konst.}$ získáme vztah pro fázovou rychlost šíření postupné vlny:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

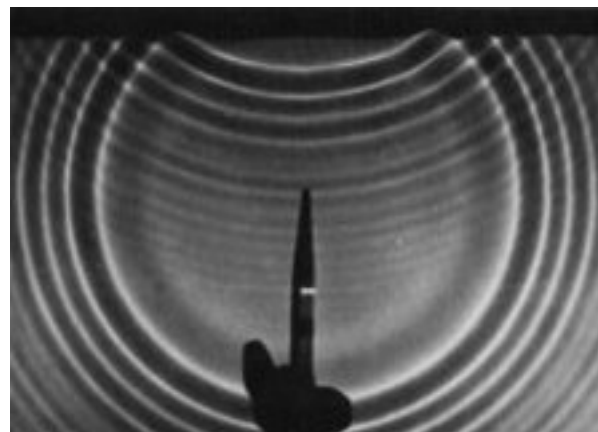
Rovnice $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ je rovnicí vlny šířící se v kladném směru osy x , postupná vlna šířící se v záporném směru osy je dáno rovnicí $y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$.

Vlnoplocha, rovinná a sférická vlna.

Vlnoplocha je myšlená přímka nebo plocha spojující body postupující vlny do nichž vlna dospěla ve stejném okamžiku a které mají stejnou fázi. Soubor míst v prostoru se stejnou fází do nichž vlnění dospěje též okamžiku nazýváme **čelní vlnoplochou** (čelem vlny).



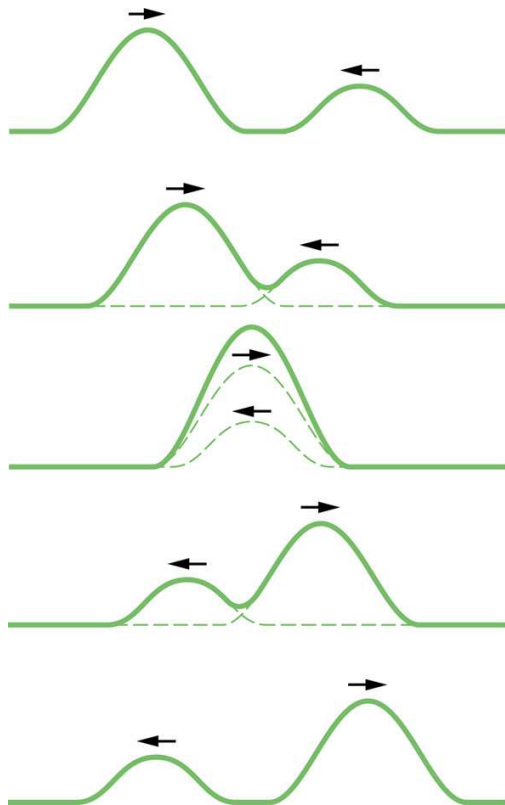
Podle geometrického tvaru vlnoplochy hovoříme o **rovinné** nebo **sférické vlně**. Postupnou vlnu můžeme považovat za rovinnou ve velké vzdálenosti od zdroje vlnění, zatímco v blízkosti zdroje vlnění je třeba uvažovat vlnu jako sférickou.



Princip superposice.

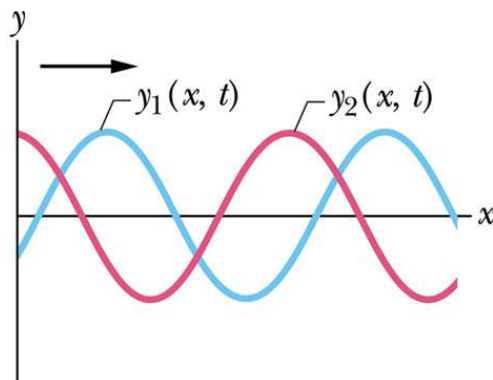
Vlnová rovnice $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$

je lineární diferenciální rovnice. Jsou-li $y_1(x,t)$ a $y_2(x,t)$ dvě různá řešení vlnové rovnice, pak je řešením též $y'(x,t) = c_1 y_1(x,t) + c_2 y_2(x,t)$, c_1 a c_2 jsou konstanty. Princip superposice je přímým důsledkem linearit vlnové rovnice.



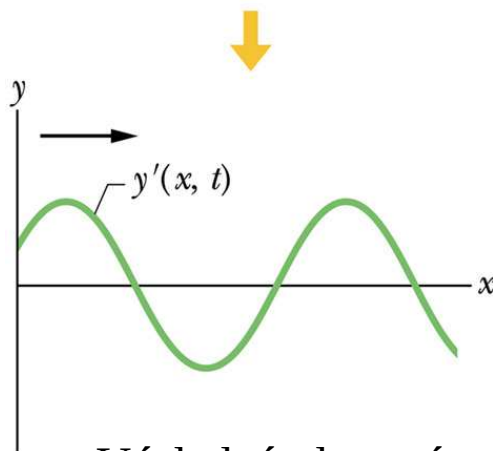
Dva pulsy $y_1(x,t)$ a $y_2(x,t)$ šířící se proti sobě se v prostoru v bodě **P** vzájemně překryjí. Funkce $y_1(x_p,t)$ a $y_2(x_p,t)$ určují výchylku jednotlivých pulsů v bodě **P**. Celková výchylka v bodě v okamžiku setkání obou pulsů je dána součtem $y'(x_p,t) = y_1(x_p,t) + y_2(x_p,t)$. Z platnosti principu superposice vyplývá, že překrývající se vlny se vzájemně neovlivňují!

Skládání vln - interference vlnění.



Vezměme harmonické vlny $y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ a $y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$ šířící se napnutou strunou ve směru osy x . Obě vlny mají stejnou amplitudu, vlnovou délku a je mezi nimi fázový rozdíl ϕ . Při setkání obou vln bude výsledné vlna šířící se strunou podle principu superposice dána součtem obou vln $y_1(x, t) + y_2(x, t)$. Říkáme, že vlny spolu **interferují**. Výsledek interference obou vln pak závisí na vzájemném fázovém rozdílu vln:

$$y' = y_1(x, t) + y_2(x, t, \phi)$$

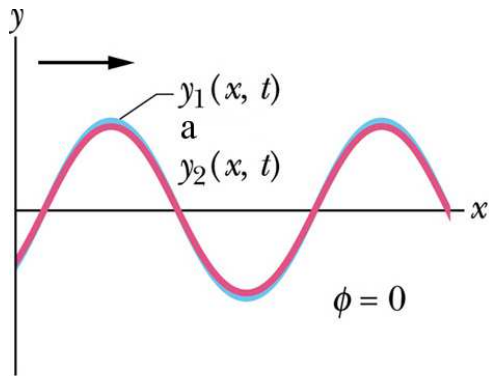


$$y'(x, t) = \left[2y_m \cos \frac{1}{2} \phi \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{1}{2} \phi \right)$$

Výsledná vlna má stejnou frekvenci jako původní vlny, její fáze je $\phi/2$. Amplituda je však závislá na fázovém rozdílu mezi oběma původním vlnami:

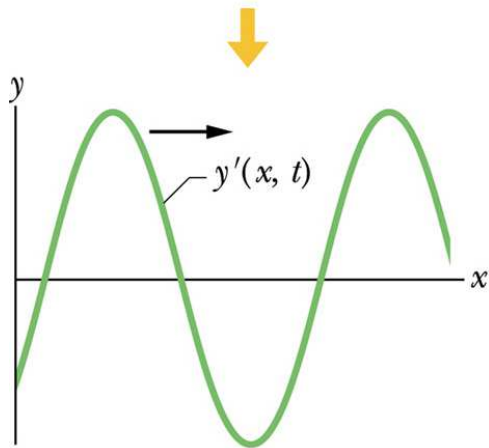
$$y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$$

Konstruktivní interference.



Amplituda dvou interferujících vln $y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$
nabývá maximální hodnoty je-li $\phi = 0$, pak platí

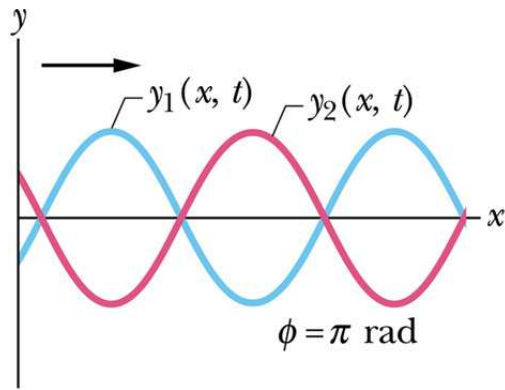
$$y'_m = 2y_m$$



Výsledná výchylka dvou konstruktivně interferujících vln je dána vztahem:

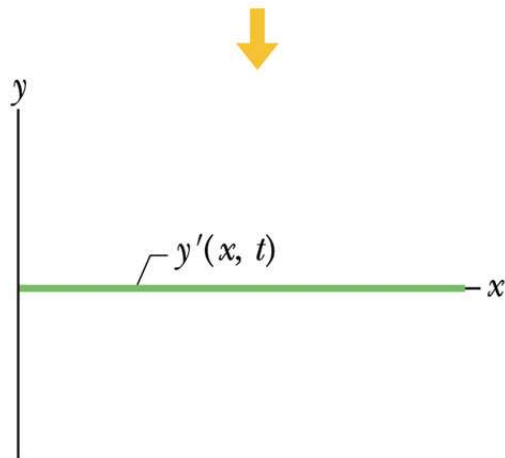
$$y'(x, t) = [2y_m] \sin \left(kx - mt + \frac{\phi}{2} \right)$$

Destruktivní interference.



Amplituda dvou interferujících vln $y'_m = \left| 2y_m \cos \frac{\phi}{2} \right|$
nabývá minimální hodnoty je-li $\phi = \pi$, pak platí

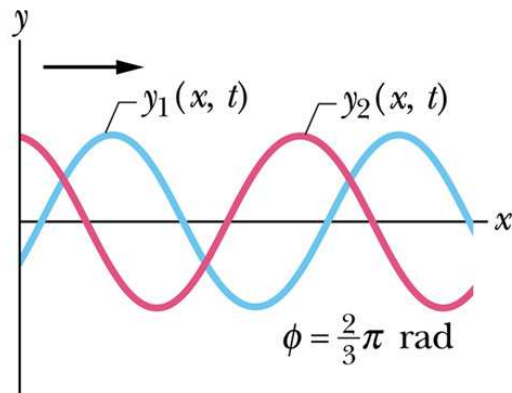
$$y'_m = 0$$



Výsledná výchylka dvou konstruktivně interferujících
vln je:

$$y'(x, t) = 0$$

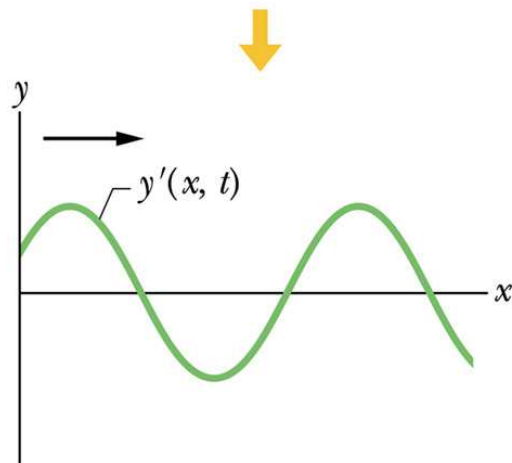
Interference vln s fázovým rozdílem $\phi = 2\pi/3$.



V případě, kdy fázový rozdíl mezi interferujícími vlnami je $\phi = 2\pi/3$ je amplituda výsledného součtu rovna amplitudě jednotlivých vln. Platí tedy:

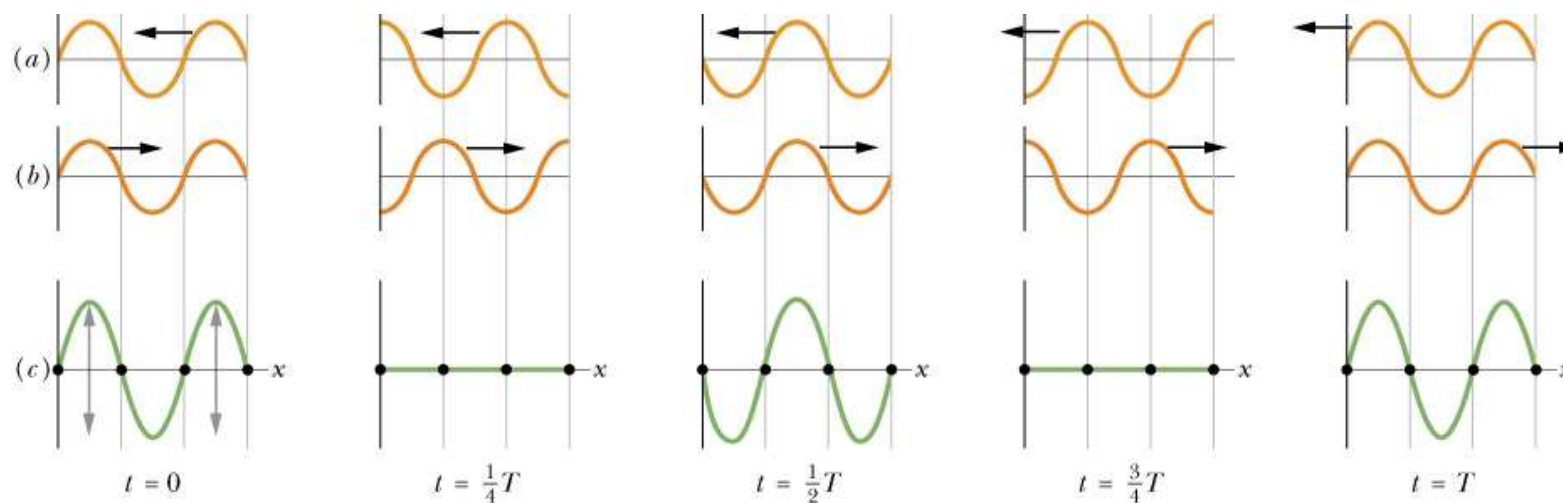
$$y'_m = y_m$$

$$y'(x, t) = [y_m] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$



Fázový rozdíl mezi interferujícími vlnami se často také vyjadřuje v násobcích vlnové délky. Platí, že fázový rozdíl 2π radiánu $= 1\lambda$.

Stojaté vlnění.



Výsledkem interference dvou vln stejné amplitudy a frekvence šířících se ve vzájemně opačném směru podél osy x , je **stojatá vlna**. Vezměme dvě vlny stejné amplitudy a stejné frekvence šířící se v proti sobě osy x :

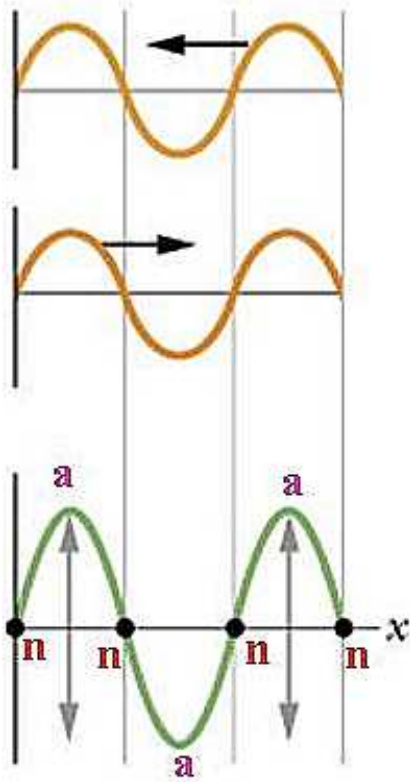
$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

Podle principu superposice je výsledná vlna je součtem obou vln:

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \rightarrow y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Výsledná vlna již není postupná, nýbrž stojatá, její amplituda je však závislá na souřadnici x .

Uzly a kmitny.



Z rovnice udávající výchylku stojaté vlny:

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Je zřejmé, že amplituda stojaté vlny je funkcí souřadnice x :

$$[2y_m \sin kx]$$

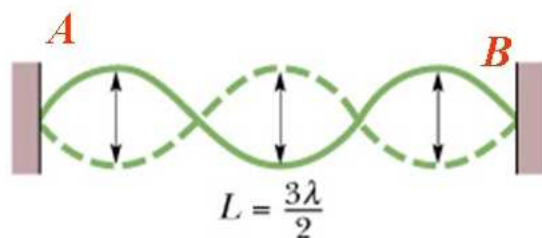
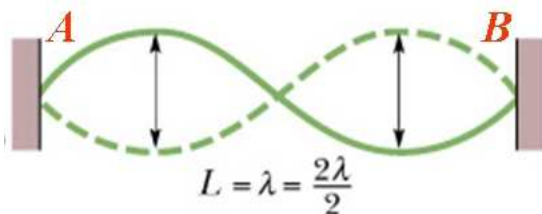
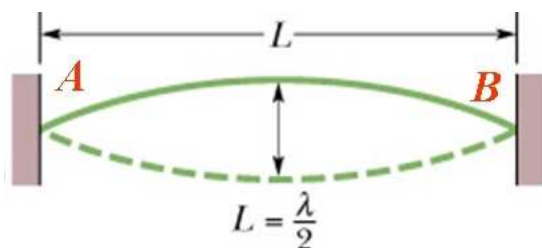
Jako **uzlové body (uzly)** označujeme takové hodnoty souřadnic v nichž je amplituda stojaté vlny nulová. Pro uzlové body platí podmínka $kx = n\pi$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$; pro x tedy platí:

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \rightarrow x_n = n \frac{\lambda}{2}; n = 0, 1, 2, \dots$$

Kmitny jsou naopak místa, v nichž je amplituda stojaté vlny maximální. Pro hodnoty souřadnic v nichž je amplituda stojaté vlny maximální platí podmínka $kx = (n + 1/2)\pi$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Tedy, maxima nastanou v místech o souřadnicích x :

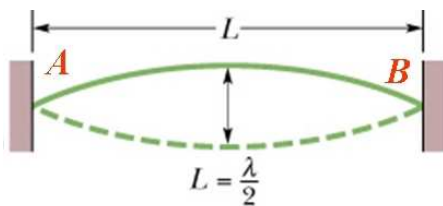
$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \rightarrow x'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}; n = 0, 1, 2, \dots$$

Stojaté vlnění a rezonance.



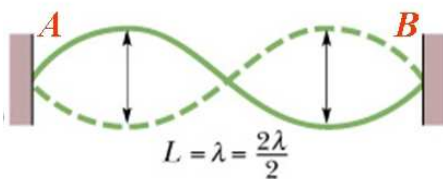
Uvažujme strunu upevněnou na obou koncích v místech **A** a **B** ležících ve vzdálenosti **L**. Harmonická postupná vlna vyslaná z bodu **A** ve směru k bodu **B** se v bodě **B** odrazí a šíří se zpět k bodu **A**, v bodě **A** se opět odrazí a šíří se směrem k bodu **B**. Tímto procesem vznikne velké množství vzájemně se překrývajících postupných vln, z nich polovina se šíří směrem k bodu **B** a polovina zpět k bodu **A**.

Pro určité frekvence postupných vln vzniknou stojaté vlny. Říkáme, že tyto stojaté vlny jsou v **rezonanci**. Frekvence postupných vln, pro něž dojde ke vzniku stojaté vlny označujeme jako **rezonanční frekvence** mechanického systému.



Rezonance nastane v případě, že stojatá vlna splňuje tzv. **hraniční podmínky**. V případě struny délky L upevněné na obou koncích požadujeme, aby amplituda stojaté vlny byla nulová. Tato hraniční podmínka vyplývá z toho, že struna se na koncích nesmí pohybovat, je pevně ukotvena v bodech **A** a **B**. Na prvním obrázku má stojatá vlna dva uzly v bodech **A** a **B**. Platí:

$$L = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2L$$



Na druhém obrázku má stojatá vlna tři uzly a platí:

$$L = 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda \rightarrow \lambda = L$$

V třetím případě má stojatá vlna čtyři uzly, v tomto případě platí:

$$L = 3\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda \rightarrow \lambda = \frac{2}{3}L$$

Obecný vztah pro rezonanční vlnovou délku a rezonanční frekvenci:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$