

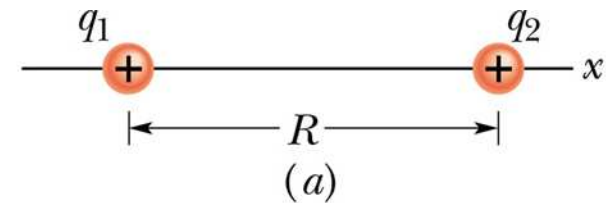
Cvičení

Intenzita a potenciál elektrického
pole.

Příklad 1.

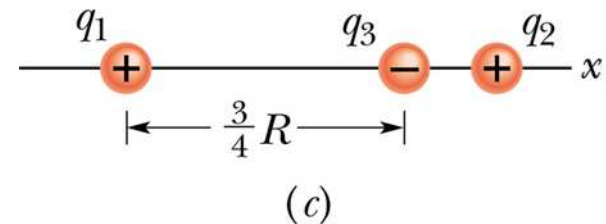
1. Náboje $q_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a $q_2 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ leží ve vzdálenosti $R = 0,02 \text{ m}$, obrázek (a). Jaká je velikost a směr síly, jíž působí na náboj q_1 náboj q_2 ?

Výsledek: Síla $F_{1\text{net}}$ je odpuzivá a působí ve směru od náboje 2 k náboji 1. Její velikost je $1,15 \cdot 10^{-24} \text{ N}$.



2. Náboje $q_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a $q_2 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ leží ve vzdálenosti $R = 0,02 \text{ m}$ na společné ose x , obrázek (c). Mezi tyto náboje vložíme náboj $q_3 = -3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ do vzdálenosti $\frac{3}{4} R$ od náboje 1. Jaká je čistá elektrostatická síla $F_{1\text{net}}$ působící na náboj 1 od nábojů 2 a 3?

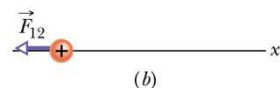
Výsledek: Síla $F_{1\text{net}}$ míří v kladném směru osy x a její velikost je $9,00 \cdot 10^{-25} \text{ N}$.



Návod k řešení

a)

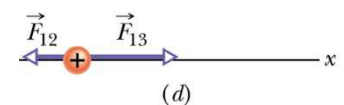
$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$



$$\vec{F}_{12} = |F_{12}| \hat{i}$$

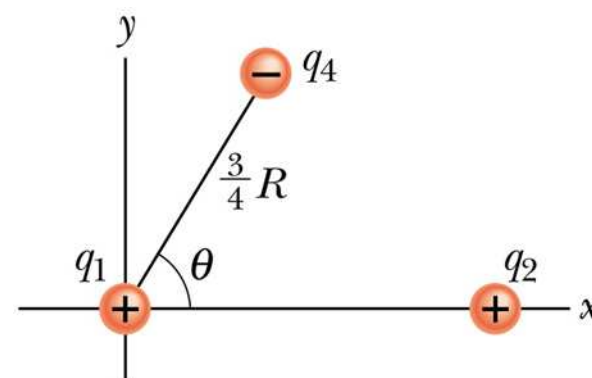
b)

$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{(\frac{3}{4}R)^2}$$

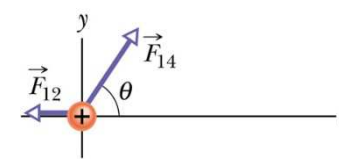


$$\vec{F}_{1\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

3. Náboje $q_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a $q_2 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ leží ve vzdálenosti $R = 0,02 \text{ m}$ na společné ose x . Mezi tyto náboje je vložen náboj $q_4 = -3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ leží ve vzdálenosti $\frac{3}{4} R$ od náboje 1. na přímce procházející nábojem 1 a 4, která svírá s osou x úhel $\theta = 60^\circ$, obrázek (e). Jaká čistá elektrostatická síla $\mathbf{F}_{1\text{net}}$ působící na náboj 1 od nábojů 3 a 4?



(e)



(f)

Výsledek: Velikost síly $F_{1,\text{net}}$ je $1,78 \cdot 10^{-24} \text{ N}$. Vektor síly $\mathbf{F}_{1,\text{net}}$ svírá s osou x úhel $\theta = 86^\circ$.

Návod k řešení

$$3) \quad F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}$$

$$F_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_4|}{\left(\frac{3}{4}R\right)^2}$$

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}$$

$$F_{1,\text{net}} = \sqrt{F_{1,\text{net},x}^2 + F_{1,\text{net},y}^2}$$

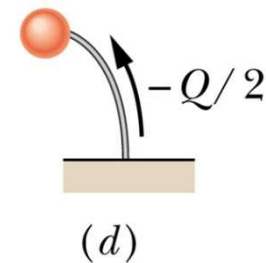
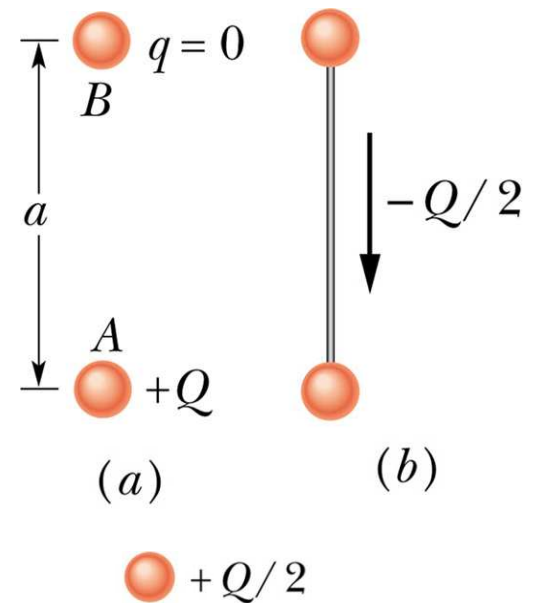
$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_{1,\text{net},y}}{F_{1,\text{net},x}}$$

Příklad 2.

Máme dvě identické izolované vodivé koule A a B vzdálené a [m], obrázek (a). Platí, že vzdálenost a je výrazně větší než rozměry vodivých koulí. Koule A nese náboj $+Q$ koule B je elektricky neutrální.

Otázky:

- Spojme na krátkou dobu obě koule vodičem jehož rozměry jsou zanedbatelné, obrázek (b). Určete sílu, kterou na sebe po přerušení vodivého spojení obě koule působí.
- Spojme kouli A na krátkou dobu se zemí, obrázek (d). Určete velikost síly, kterou na sebe obě koule působí po odpojení vodiče.



Příklad 3.

Poloměr atomového jádra atomu železa je $r = 4,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ a obsahuje 26 protonů.

- a) Určete velikost odpudivé síly mezi dvěma protony ležícími ve vzdálenosti poloměru atomového jádra, permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ kg}^{-2}$, $e_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- b) Určete velikost gravitační síly působící mezi dvěma protony, klidová hmotnost protonu je $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Gravitační konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Návod k řešení

a) a b)
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, F = G \frac{m_p^2}{r^2}$$

Příklad 4.

Malé těleso je nabito nábojem Q . Poté je náboj q z nabitého tělesa přenesen na jiné malé těleso. Obě tělesa jsou vzdálena 1 m . Jaký musí být náboj q , aby síla, kterou na sebe obě tělesa působí byla maximální

Příklad 5.

Nabitá bodová částice vytváří v bodě vzdáleném 2 m elektrické pole velikosti E . V jaké vzdálenosti je velikost elektrického pole čtvrtinová.

Příklad 6.

Určete intenzitu elektrického pole na membráně na níž je napětí (mezi vnitřní a vnější stranou) 80 mV . Tloušťku membrány d předpokládejme 10 nm .

$$\Delta V = Ed$$

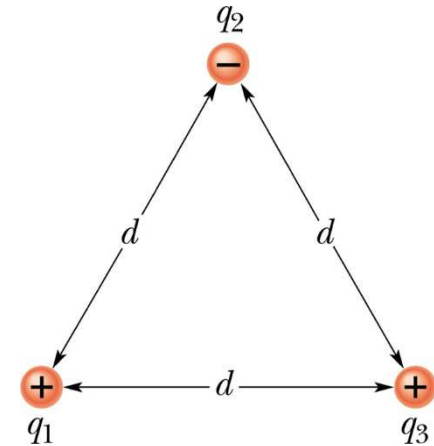
Výsledek: 80 MN/C

Příklad 7.

Obrázek ukazuje tři náboje držené v pevných polohách silami, které na obrázku nejsou znázorněny. Je dána vzdálenost $d = 12 \text{ cm}$ a náboje $Q_1 = +Q$, $Q_2 = -4Q$, $Q_3 = +2Q$, kde $Q = 150 \text{ nC}$.

Jaká je elektrická potenciální energie této soustavy nábojů?

Výsledek: $E_p = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J}$



Příklad 10.

Návod k řešení.

$$(1) \quad E_{p,12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d}$$

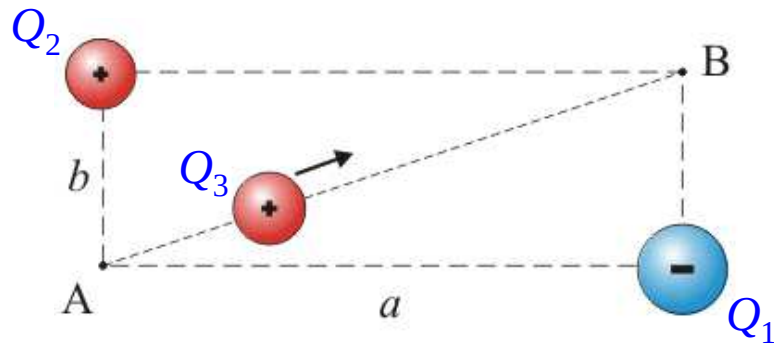
$$(2) \quad W_{\text{ext},13} + W_{\text{ext},23} = E_{p,13} + E_{p,23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{d}$$

$$(3) \quad E_p = E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{d} + \frac{Q_1 Q_3}{d} + \frac{Q_2 Q_3}{d} \right) =$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q(-4Q)}{d} + \frac{Q(2Q)}{d} + \frac{(-4Q)(2Q)}{d} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10Q^2}{d}$$

Příklad 11.

Práce vykonaná při přenesení náboje

Obdélník na obrázku má strany dlouhé $a = 15 \text{ cm}$ a $b = 5 \text{ cm}$. V protilehlých vrcholech jsou umístěny náboje $Q_1 = -5 \text{ } \mu\text{C}$ a $Q_2 = +2 \text{ } \mu\text{C}$. Jakou práci vykoná elektrická síla při přenesení třetího náboje $Q_3 = +3 \text{ } \mu\text{C}$ z vrcholu A po úhlopříčce obdélníka do vrcholu B?



$$W = E_{pA} - E_{pB} \rightarrow W = q_3(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$\varphi_A = \varphi_{1A} + \varphi_{2A}$$

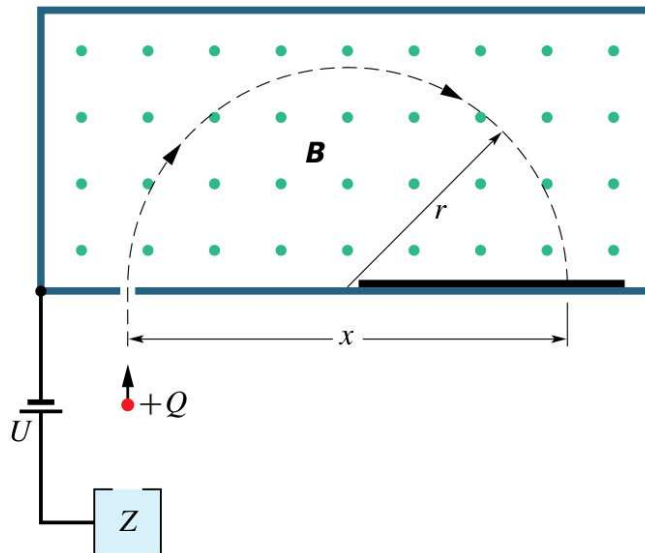
$$\varphi_B = \varphi_{1B} + \varphi_{2B}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

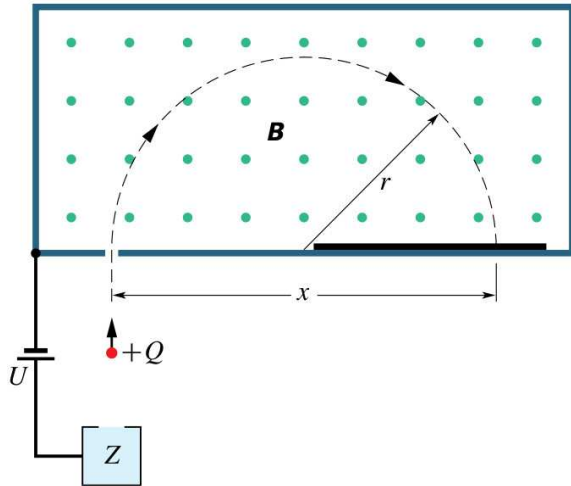
Příklad 12.

Na obr. 29.14 je schematicky znázorněn princip *hmotnostního spektrometru*, který slouží k měření hmotnosti iontů: iont o hmotnosti m (která má být změřena) s nábojem Q vznikne ve zdroji Z a poté je urychlen elektrickým polem o napětí U . Iont opustí zdroj Z a vletí štěrbinou do separační komory, ve které na něj působí homogenní magnetické pole B , kolmé k jeho rychlosti (B je kolmé k rovině obrázku a směřuje k ní). Magnetické pole způsobí že se iont bude pohybovat po půlkružnici, dopadne na fotografickou desku ve vzdálenosti x od štěrbiny a exponuje ji tam.

Nechť $B = 80,000 \text{ mT}$, $U = 1\,000,0 \text{ V}$ a $Q = +1,602\,2 \times 10^{-19} \text{ C}$. Iont dopadne ve vzdálenosti $x = 1,625\,4 \text{ m}$ od štěrbiny. Jak je jeho hmotnost m , vyjádřená pomocí atomové hmotnostní jednotky ($u = 1,660\,5 \times 10^{-27} \text{ kg}$)?



Příklad 12.



Nejprve najdeme souvislost mezi hmotností iontu a naměřenou vzdáleností. Ten vyplývá z rovnice pro pohyb nabité částice v magnetickém poli.

$$\left. \begin{array}{l} F = ma = \frac{mv^2}{r} \\ F = QvB \end{array} \right\} \frac{mv^2}{r} = QvB \rightarrow r = \frac{mv}{QB}$$

Dále je třeba určit rychlost iontu, kterou získá průchodem elektrickým polem.

$$QU = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$$

Příklad 12.

Spojením odvozených vztahů získáme rovnici pro hmotnost iontu:

$$\frac{mv^2}{r} = QvB \rightarrow r = \frac{mv}{QB} \rightarrow r = \frac{m}{QB} \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{Q}}$$

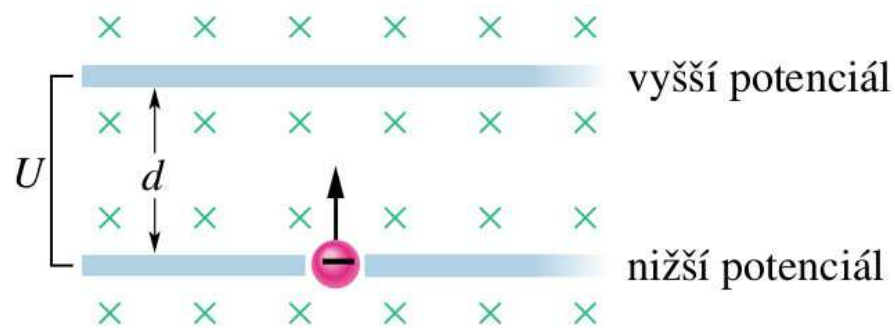
$$x = 2r = \frac{m}{QB} \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{Q}} \rightarrow m = \frac{B^2 Q x^2}{8U}$$

$B = 80,000 \text{ mT}$, $U = 1\,000,0 \text{ V}$ a $Q = +1,602\,2 \times 10^{-19} \text{ C}$. Iont dopadne ve vzdálenosti $x = 1,6254 \text{ m}$ od štěrbin. Jak je jeho hmotnost m , vyjádřená pomocí atomové hmotnostní jednotky ($u = 1,660\,5 \times 10^{-27} \text{ kg}$)?

Výsledek: $m = 3,3863 \times 10^{-25} \text{ kg}$, což je $203,93 \text{ u}$.

Příklad 9.

Podle obrázku elektron o hmotnosti m s nábojem $-e$ vlétá se zanedbatelnou rychlostí do prostoru mezi dvěma deskami, mezi nimiž je napětí U a jsou vzdáleny d . Elektron vlétá do této oblasti ve směru kolmém ke kladné horní desce. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině obrázku. Určete minimální velikost B , při které elektron nedopadne na horní desku.

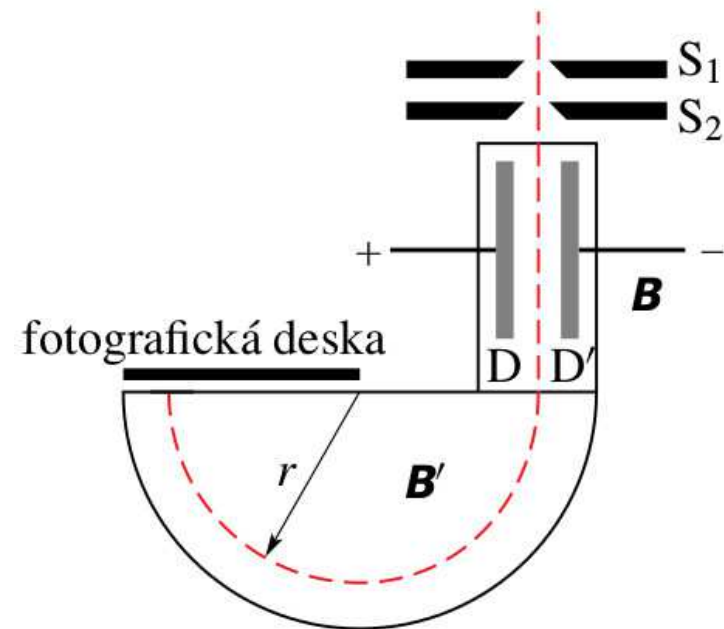


Příklad 8.

Bainbridgeův hmotnostní spektrometr, znázorněný na obrázku separuje ionty, které mají tutéž rychlost, ale mírně odlišnou hmotnost. Ionty po průchodu štěrbinami S_1 a S_2 projdou selektorem rychlostí ve kterém je elektrické pole E tvořeno nabitými deskami D a D' a magnetické pole B kolmé k E i k trajektorii iontů. Ionty, které projdou selektorem nevychýleny, budou mít stejně velkou rychlost v . Poté vniknou do oblasti, kde na ně působí jiné homogenní magnetické pole o indukci B' , a to způsobí že poletí po kružnici. Dopad iontů je registrován pomocí fotografické desky.

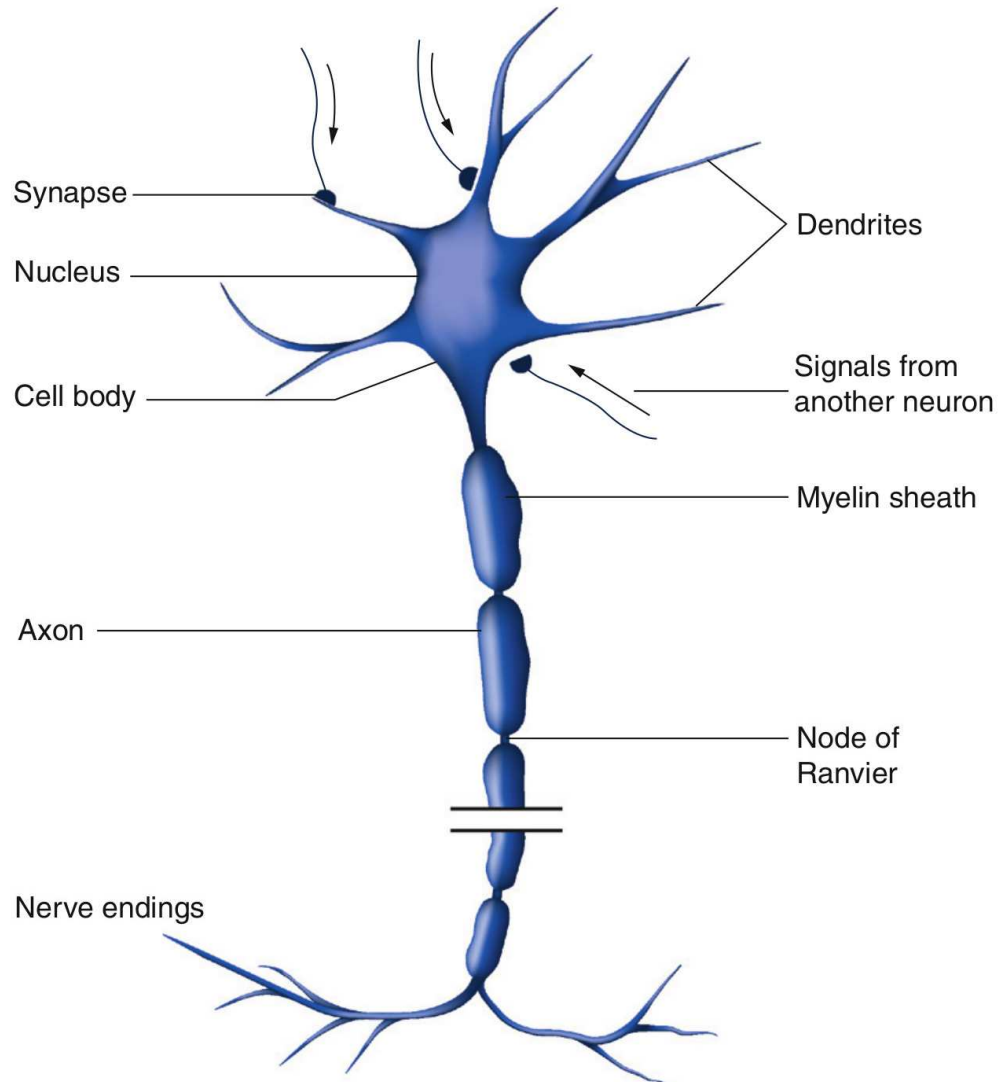
Dokažte, že pro tyto ionty platí vztah
$$\frac{Q}{m} = \frac{E}{rBB'}$$

kde r je poloměr kružnice.



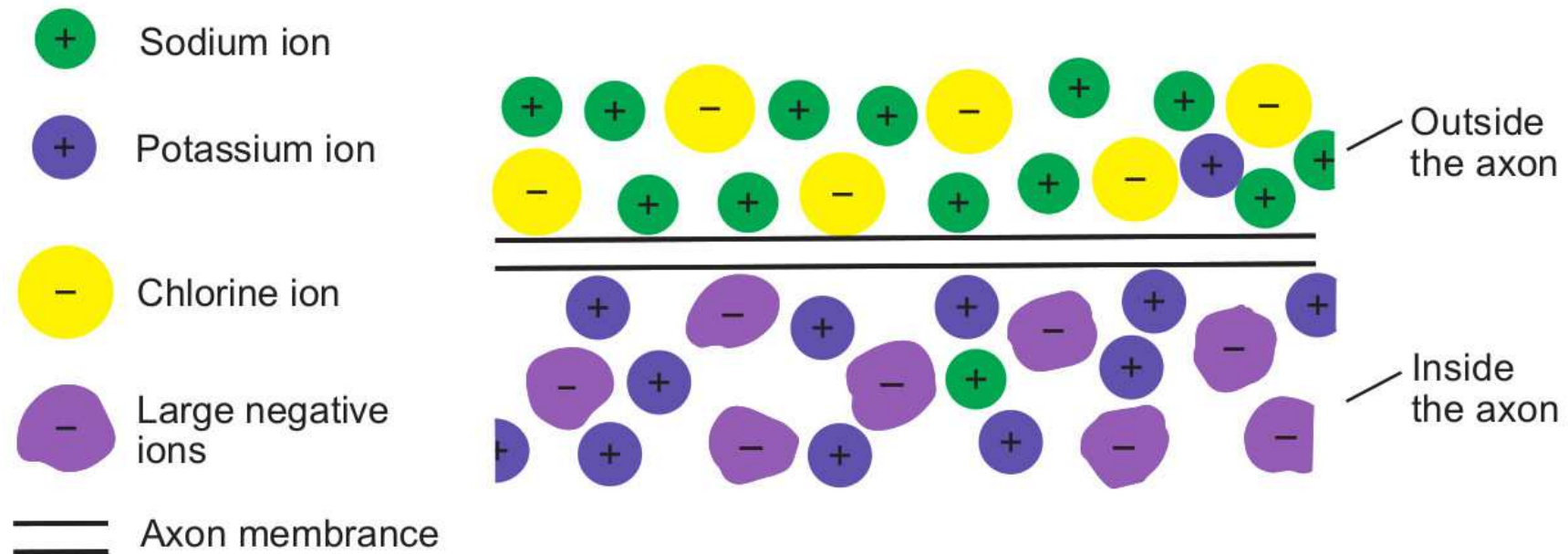
Příklad 13 - Model vedení nervového vzruchu axonem.

V klidovém stavu je potenciál axonu -70mV , během pulsu se potenciál změní o $+30\text{mV}$, čistá změna potenciálu na membráně je 100mV .



Axon-cont.

Vnitřek axonu je vyplněn iontovou kapalinou, která je oddělena od vnějšího iontového prostředí tenkou membránou. Membrána axonu má tloušťku od 50 – 100 Å a je relativně dobrým ale ne perfektním izolantem, kterým může do určité míry procházet elektrický proud. Ve vnějším prostoru jsou převážně ionty sodíku a chloru, vnitřní prostor obsahuje převážně ionty draslíku a větší organické záporně nabitě molekuly.

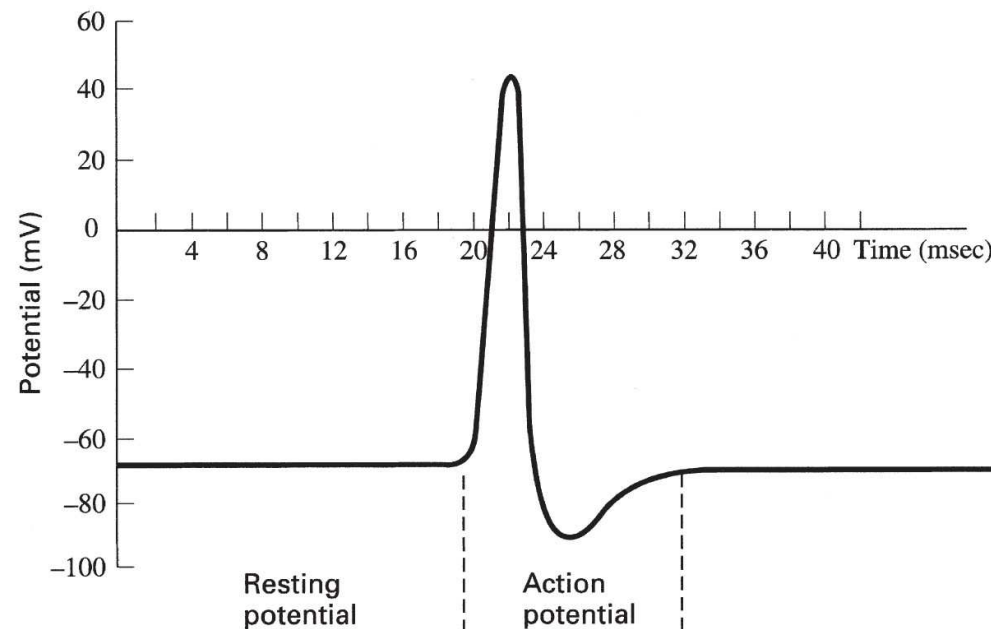


Axon-cont.

Časový průběh **akčního potenciálu** šířícího se axonem naměřený v jednom bodě axonu.

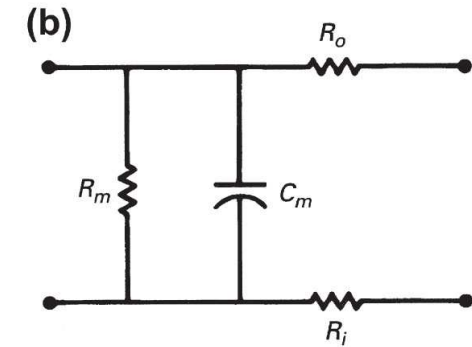
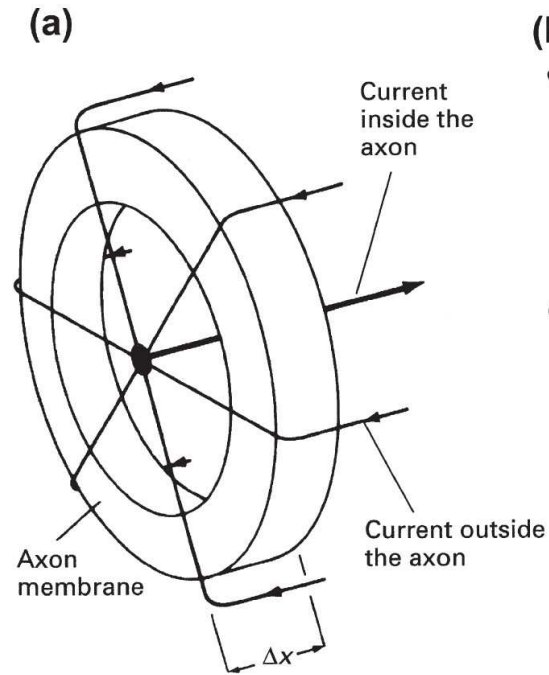
Velikost impulze a jeho délka trvání je typická pro většinu neuronů. Příchod impuzu vede k rychlému zvýšení potenciálu na hodnotu **30 mV**, následně dojde k rychlému poklesu na hodnotu **-90 mV** a následně relaxaci na úroveň klidového potenciálu. Rychlost šíření závisí na typu axonu, nevyšší rychlost šíření dosahuje **100 ms⁻¹**.

Impuls vyvolaný neuronem má vždy stejnou velikost a šíří se axonem be útlumu. Impulzy jsou produkovány opakovaně rychlostí jež závisí na míře stimulace.



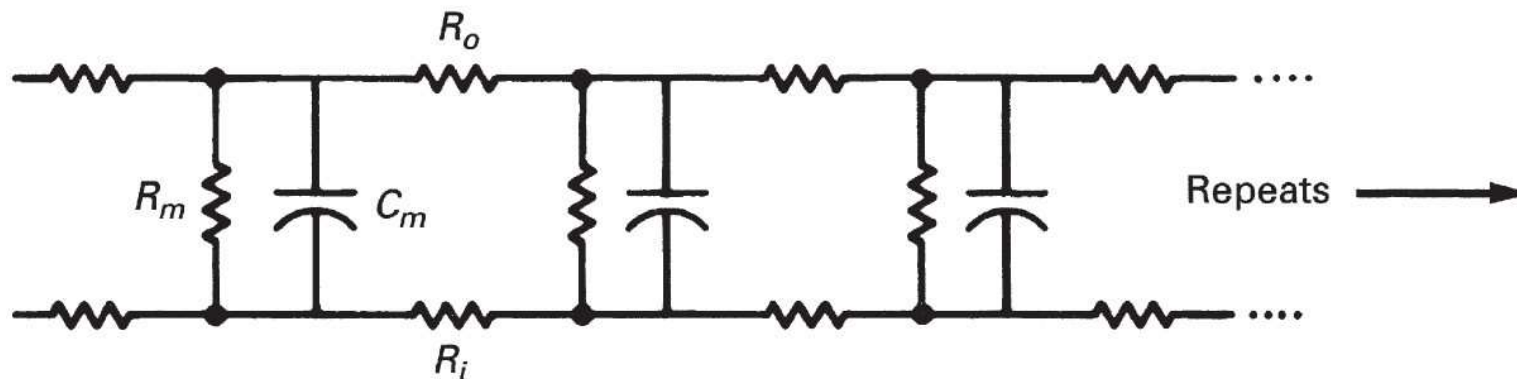
Axon-cont.

Některé aspekty šíření elektrického signálu axonem můžeme do jisté míry analyzovat jednoduchým modelem založeným na podobnosti s izolovaným elektrickým vodičem ponořeným do roztoku s ionty. Při analýze musíme uvažovat odpor tekutiny vnitřního a vnějšího prostoru axonu a elektrické vlastnosti jeho membrány.



Obrázek a): Základní jednotka axonu odpovídající vzdálenosti dvou uzlů Δx a základní elektrické proudy axonem.

Obrázek b): Náhradní schéma elektrického zapojení reprezentující jednu funkční jednotku axonu. R_o a R_i odpor vnějšího a vnitřního prostředí axonu, R_m a C_m odpor a kapacita membrány axonu.



Axon-cont.

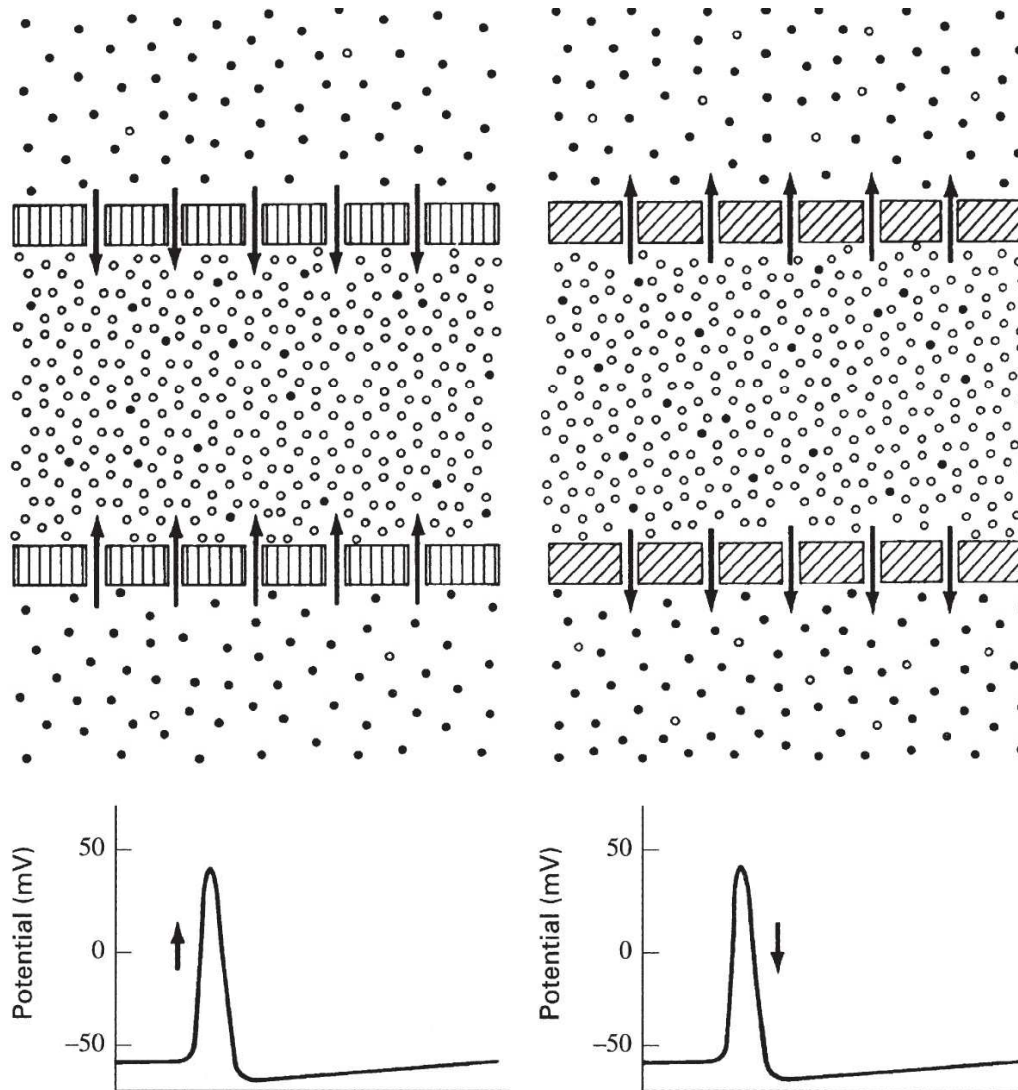
Základní elektrické vlastnosti axonu s myelinovou pochvou a bez myelinové pochvy.

Table 13.1 Properties of Sample Axons

Property	Nonmyelinated axon	Myelinated axon
Axon radius	$5 \times 10^{-6} \text{ m}$	$5 \times 10^{-6} \text{ m}$
Resistance per unit length of fluid both inside and outside axon (r)	$6.37 \times 10^9 \Omega/\text{m}$	$6.37 \times 10^9 \Omega/\text{m}$
Conductivity per unit length of axon membrane (g_m)	$1.25 \times 10^{-4} \text{ mho/m}$	$3 \times 10^{-7} \text{ mho/m}$
Capacitance per unit length of axon (c)	$3 \times 10^{-7} \text{ F/m}$	$8 \times 10^{-10} \text{ F/m}$

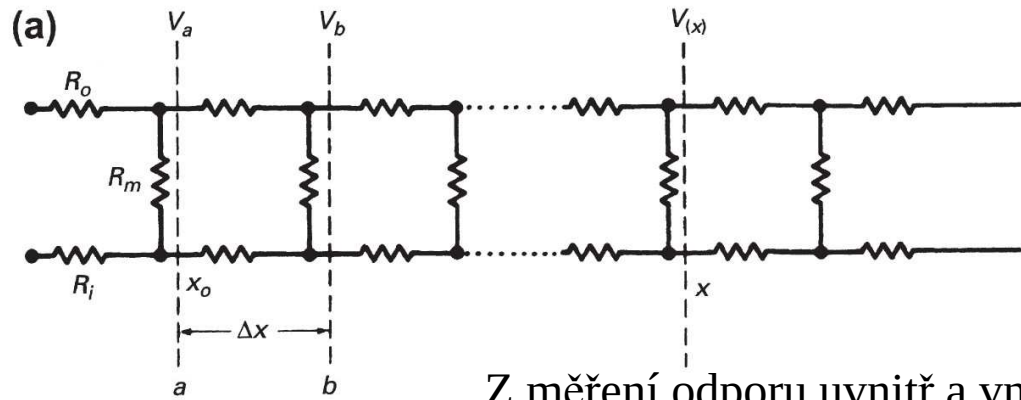
Axon-cont.

Analýza axonu.



$$\Delta Q = C \Delta V$$

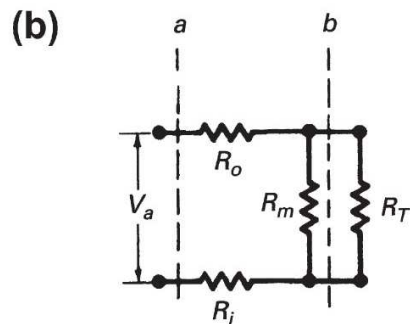
Axon-cont.



$$R_T = R_o + R_i + \frac{R_T R_m}{R_T + R_m}$$

Z měření odporu uvnitř a vně axonu vyplývá, že odpory jsou stejné:

$$R_i = R_o = R$$



$$R_T = 2R + R + \frac{R_T R_m}{R_T + R_m} \Rightarrow R_T = R + \sqrt{(R^2 + 2RR_m)}$$

$$V_b = \frac{V_a}{1 + \sqrt{\frac{2R(R_T + R_m)}{R_T R_m}}} = \frac{V_a}{1 + \beta}$$

Axon-cont.

Na základě naměřených parametrů r a g_m uvedených v předcházející tabulce vypočteme R a R_m :

$$R = r\Delta x, \quad \frac{1}{R_m} = g_m\Delta x \Rightarrow R_m = \frac{1}{g_m\Delta x}$$

$$R_T = \sqrt{\frac{2r}{g_m}}, \quad \beta = \Delta x \sqrt{2rg_m} = \frac{\Delta x}{\lambda} \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{2rg_m}}$$

Nebot' Δx je velmi malé je β též velmi malé a proto můžeme nahradit $\frac{1}{1+\beta} \approx 1-\beta$

Potenciál V_b v místě b ve vzdálenosti Δx od a je dán vztahem: $V_b = V_a \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda}\right)$

Potenciál V ve vzdálenosti $n\Delta x$ od a je pak dána vztahem: $V_b = V_a \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda}\right)^n$

Axon-cont.

Potenciál V ve vzdálenosti Δx od a je pak dána vztahem:

$$V(x) = V_a \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda} \right)^n$$

Za předpoklad, že Δx je velmi malé a n velmi velké, můžeme ukázat, že rovnice

$$V(x) = V_a \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda} \right)^n$$

Je rovna:

$$V(x) = V_a e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

Z uvedené rovnice je zřejmé, že potenciál klesá exponenciálně v závislosti na délce axonu. V případě axonu bez myelinové pochvy je λ přibližně 0,8 mm. Tedy na vzdálenosti 0,8 mm poklesne potenciál o 37 % mezi dvěma uzly. Axon je pokrytý myelinovou pochvou vždy pouze mezi dvěma uzly vzdálenými 2 mm.

Axon obalený myelinovou pochvou má podstatně menší vodivost membrány a λ je větší, pro hodnoty z uvedené tabulky přibližně 16 mm. Hodnota potenciálu tak poklesne pouze o 13 % mezi dvěma uzly.