

ALGEBRAICKÉ ROVNICE, NEROVNICE A JEJICH SOUSTAVY

Algebraické rovnice: lineární, kvadratické (normovaná rovnice, ryze kvadratická, bez absolutního členu, řešení v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$, rozklad na součin kořenových činitelů, Vietovy vztahy) s absolutními hodnotami, iracionální, rovnice s parametrem, rovnice binomické, trinomické, reciproké rovnice, početní a grafické řešení rovnice
Algebraické rovnice vyšších stupňů: do 4. stupně jsou řešitelné konečným počtem algebraických operací (rovnice 3. a 4. stupně jsou řešitelné užitím Cardanových vzorců)

1. Každý polynom n -tého stupně s komplexními koeficienty má v $\mathbb{C}$ n kořenů, přičemž k - násobný kořen se počítá k -krát.
2. Jestliže má polynom s reálnými koeficienty imaginární kořen, pak má i kořen s ním komplexně sdružený.
3. Libovolný mnohočlen s komplexními koeficienty stupně n má alespoň jeden komplexní kořen.
4. Jestliže je x_1 kořenem algebraické rovnice $f(x) = 0$, pak je mnohočlen $f(x)$ dělitelný kořenovým činitelem $(x - x_1)$ beze zbytku, tj. existuje mnohočlen $g(x)$ o stupeň nižší, $f(x) = (x - x_1)g(x)$.
5. Každý polynom s reálnými koeficienty se dá rozložit na součin polynomů nejvýš 2. stupně s reálnými koeficienty (ireducibilní činitele).
6. Jestliže x_0 je vícenásobným kořenem $f(x)=0$, je x_0 také kořenem $f'(x)=0$ s násobností o 1 menší. Je-li x_0 jednoduchým kořenem rovnice $f(x)=0$, není již kořenem rovnice $f'(x)=0$.
7. Necht' $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělná) je kořenem rovnice s celočíselnými koeficienty

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \text{ Potom } p/a_0 \wedge q/a_n. \text{ (Věta o racionálních kořenech.)}$$

Reciproké rovnice: je-li x kořenem, je kořenem také $\frac{1}{x}$

prvního druhu: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, kde $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots$

pro sudé n je $a_{\frac{n}{2}}$ libovolný koeficient

př.: $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$

druhého druhu: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}, a_2 = -a_{n-2}, \dots$

pro sudé n je $a_{\frac{n}{2}} = 0$

př.: $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$

řešení reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně: ($n=2m$)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

- 1) obě strany rovnice vydělíme číslem x^m :

$$a_0 \left(x^m + \frac{1}{x^m} \right) + a_1 \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) + \dots + a_{m-1} \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_m = 0$$

- 2) provedeme Lagrangeovu substituci:

$$y = x + \frac{1}{x}, y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}, y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3} \dots$$

- 3) dostaneme rovnici polovičního stupně (nemusí být reciproká)
- 4) protože lze řešit algebraické rovnice 1.- 4. stupně, reciproké rovnice 1. druhu sudého stupně lze řešit až do 8. stupně

řešení reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně:

- 1) vždy má kořen $x = -1$
- 2) mnohočlen na levé straně dělíme kořenovým činitelem $(x + 1)$
- 3) dostaneme reciprokou rovnici 1. druhu sudého stupně o stupeň nižší
- 4) reciproké rovnice 1. druhu lichého stupně lze řešit až do 9. stupně

řešení reciproké rovnice 2. druhu :

- 1) vždy má kořen $x = 1$
- 2) mnohočlen na levé straně dělíme kořenovým činitelem $(x - 1)$
- 3) dostaneme reciprokou rovnici 1. druhu o stupeň nižší
- 4) reciproké rovnice 2. druhu lze řešit až do 10. stupně

Algebraické nerovnice: pojem algebraická nerovnice, ekvivalentní a neekvivalentní úpravy nerovnice, zkouška, početní a grafické řešení, nerovnice lineární, s absolutními hodnotami, kvadratické, v podílovém a součinném tvaru, iracionální nerovnice.

Rovnice, nerovnice a soustavy rovnic a nerovnic s více neznámými: početní a grafické řešení, soustavy lineárních rovnic, Frobeniova věta, ekvivalentní úpravy, metody řešení (sčítací, dosazovací, srovnávací), soustavy s kvadratickými rovnicemi (jedna kvadratická, jedna lineární; dvě kvadratické), soustavy s iracionálními rovnicemi, soustavy s parametrem.