ROVNICE A NEROVNICE S PARAMETREM

1. rovnice, které nemají ve jmenovateli ani parametr, ani neznámou (př. 1) až 4))
2. ve jmenovateli je parametr (př. 5) až 6))
3. ve jmenovateli je neznámá (př. 10)
4. rovnice s odmocninami (př. 8 a 9) nadoma, kratší
5. kvadratické r. s parametrem (př. 11 a 12)
6. nerovnice s param. (lineární) (př. 13–16)
7. soustavy s jedním parametrem (17 – 18) (19) dlouhé (za úkol)

1) $x(a+2)+a(x-2)=x+a$

$x(a+2)+xa-2a=x+a$

$x(a+2+a-1)=3a$

$x(2a+1)=3a$

$a=-\frac{1}{2}$: $x\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x+1=x-\frac{1}{2}$

$x+1=x-\frac{1}{2}$

$\emptyset$

$a\neq-\frac{1}{2}$: $x=\frac{3a}{2a+1}$

2) $x(x+a)+x(x-a)=2(x+a)^2$

$x^2+\cancel{ax}+x^2-\cancel{ax}=2(x^2+2ax+a^2)$

$\cancel{2x^2}=\cancel{2x^2}+4ax+2a^2$

$4ax=-2a^2$

$ax=-\frac{a^2}{2}$

$a=0$: $x^2+x^2=2x^2$

$x\in R$

$a\neq0$: $x=-\frac{a}{2}$

3) $(4+x)(t^2+x)-(t^2-x)(4-x)=8tx+2t^2-8$

$\cancel{4t^2}+xt^2+4x+\cancel{x^2}-\cancel{4t^2}+4x+xt^2-\cancel{x^2}=8tx+2t^2-8$

$2xt^2+8x=8tx+2t^2-8$

$2xt^2+8x-8xt=2t^2-8$

$x(2t^2+8-8t)=2t^2-8$

$2t^2+8-8t\neq0$

$t\neq2$

$x=\frac{2\cancel{(t-2)}(t+2)}{2(t-2)^{\cancel{2}}}$

$x=\frac{t+2}{t-2}$

$2t^2-8t+8=0$

$t^2-4t+4=0$

$t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=2$

$t=2$

$(4+x)(4+x)-(4-x)(4-x)=16x+\cancel{8}-\cancel{8}$

$(4+x)^2-(4-x)^2=16x$

$(4+\cancel{x}+4-\cancel{x})(4+x-4+x)=16x$

$16\cdot x=16x$

$x\in R$

4) $(b^2-1)x = b-1$

[redacted]

$b \neq \pm 1$ | $b=1,\ b=-1$

$x = \frac{b-1}{(b-1)(b+1)}$

$x = \frac{1}{b+1}$

$\underline{b=1}$: $0 \cdot x = 0$, $x \in R$

$\underline{b=-1}$: $0 \cdot x = -2$, $\emptyset$

5) $\frac{x-a}{1-a} = \frac{x+a}{1+a}$

[redacted]

$\frac{x-a}{1-a} - \frac{x+a}{1+a} = 0$

$\frac{x + xa - a - \cancel{a^2} - \cancel{x} - a + ax + \cancel{a^2}}{(1-a)(1+a)} = 0$

$\frac{2ax-2a}{(1-a)(1+a)} = 0 \iff 2ax - 2a = 0 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq 1$

~~$x \neq 2a$~~

$\cancel{2}ax = \cancel{2}a$

$a \neq 0$: $x = 1$

$a = 0$: $\frac{x}{1} - \frac{x}{1} = 0$

$x - x = 0$

$x \in R$

a	x
$a=-1$	nedef.
$a=1$	nedef.
$a=0$	$x \in R$
$a \neq 0, \pm 1$	$x=1$

6) $2x - a = \frac{2x-1}{a}$

[redacted]

$a(2x-a) = 2x-1$

$2ax - a^2 = 2x - 1$

$2ax - 2x = a^2 - 1$

$2x(a-1) = (a-1)(a+1)$

$x(a-1) = \frac{(a-1)(a+1)}{2}$

$a-1=0 \Rightarrow a=1$

$2x-1 = 2x-1$

$x \in R$

$a-1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

$x = \frac{a+1}{2}$

a	x
$a=0$	nedef.
$a=1$	$x \in R$
$a \neq 0,1$	$\frac{a+1}{2}$

7) $(m^2-1)x^2+2mx+1=0$

$m^2-1=0$ $\quad$ ~~$2mx=-1$~~ ~~$mx=-\frac{1}{2}$~~

$m=\pm 1$

$m=1$: $\quad 2x=-1$, $\quad x=-\frac{1}{2}$ $\qquad m=-1$: $\quad -2x+1=0$, $\quad x=\frac{1}{2}$

m	x
$m=1$	$x=-\frac{1}{2}$
$m=-1$	$x=\frac{1}{2}$
$m\neq\pm 1$	$x_1=-\frac{1}{m-1}$ $x_2=-\frac{1}{m+1}$

$m\neq\pm 1$:

$$D=4m^2-4(m^2-1)=4m^2-4m^2+4=4>0 \Rightarrow 2\text{ ř.}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm 2}{2(m^2-1)}=\begin{cases}\dfrac{-2m-2}{2(m-1)(m+1)}=\dfrac{-2(m+1)}{2(m-1)(m+1)}=-\dfrac{1}{m-1}\\[2ex] \dfrac{-2m+2}{2(m-1)(m+1)}=\dfrac{2(1-m)}{2(m-1)(m+1)}=\dfrac{1}{m+1}\end{cases}$$

8) $1+\sqrt{x}=\sqrt{x-a}$ $\quad /^2$

$1+2\sqrt{x}+\cancel{x}=\cancel{x}-a$

$2\sqrt{x}=-1-a$

$\sqrt{x}=\frac{-1-a}{2}$ $\quad /^2$

$x=\frac{(a+1)^2}{4}$

Zk.: $L=1+\frac{|a+1|}{2}$

$P=\sqrt{\left|\frac{(a+1)^2-4a}{4}\right|}=\frac{|a-1|}{2}$

$L=P \Leftrightarrow 1+\frac{|a+1|}{2}=\frac{|a-1|}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a\le -1 & \Rightarrow x=\frac{1}{4}(a+1)^2 \\ a>-1 & \Rightarrow x\in\emptyset\end{array}}$$

	$\|a+1\|$	$\|a-1\|$
$(-\infty,-1\rangle$	$-$	$-$
$\langle -1,1)$	$+$	$-$
$\langle 1,\infty)$	$+$	$+$

$(-\infty,-1\rangle$: $\frac{2-a-1}{2}=\frac{1-a}{2}$

$\frac{1-a}{2}=\frac{1-a}{2}$ o.k.

$\langle -1,1)$: $\frac{2+a+1}{2}=\frac{1-a}{2}$

$3+a=1-a$

$2a=-2$

$a=-1$

$\langle 1,\infty)$: $\frac{2+a+1}{2}\neq\frac{a-1}{2}$

$0a=2$ $\quad \emptyset$

a	x
$(-\infty,-1\rangle$	$x=\frac{(a+1)^2}{4}$
$(-1,\infty)$	$\emptyset$

9

9) $\sqrt{x^2+m} = m - x$

$$\cancel{x^2} + m = m^2 - 2mx + \cancel{x^2}$$

$$2mx = m(m-1)$$

$m \neq 0 \Rightarrow x = \frac{m-1}{2}$

$m = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x$

$|x| = -x$ … platí jen pro $x \leq 0$ (podle definice abs. h.)

Protože jsme umocňovali, musíme udělat zkoušku (pro $m \neq 0$)

$$L = \sqrt{x^2+m} = \sqrt{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 + m} = \sqrt{\frac{m^2+2m+1}{4}} = \sqrt{\frac{(m+1)^2}{4}} = \left|\frac{m+1}{2}\right|$$

$$P = m - x = m - \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$$

$L = P \Leftrightarrow \left|\frac{m+1}{2}\right| = \frac{m+1}{2}$ … podle definice abs. hodnoty platí jen pro $\frac{m+1}{2} \geq 0$, tedy pro $m \geq -1$

m	x
$m = 0$	$x \in (-\infty, 0\rangle$
$m \in (-\infty, -1)$	$\emptyset$
$m \in \langle -1, \infty) \setminus \{0\}$	$x = \frac{m-1}{2}$

10) $p+1 = \dfrac{p^2-1}{x}$ $\qquad x \neq 0$ $\qquad$ 10

$x \cdot (p+1) = p^2 - 1$

$p+1 \neq 0$

$p \neq -1$

$x = \dfrac{p^2-1}{p+1} = \underline{\underline{p-1}}$

$p+1 = 0$

$p = -1$

$x \cdot 0 = 0$

$\underline{\underline{K = R \setminus \{0\}}}$

ZK. musíme ověřit, jestli nevyjde (pro $p \neq -1$) $x = 0$:

$x = p-1$ ... $x=0$ by vyšlo pro $p = 1$

$0 = p-1$

p	x
$p = 1$	$\emptyset$
$p = -1$	$(-\infty; \infty) \setminus \{0\}$
$p \in R \setminus \{\pm 1\}$	$x = p-1$

(5). ~~Kl 2~~ Řešení kvadrat. rovnic s parametrem (kvadratická je, když je proměnná na druhou) (11)

1) určujeme hodnoty parametru, pro které je rce skutečně kvadratická

2) — " — , pro něž má rce v R dva kořeny, dvojnásobný nebo žádný

(1)

$px^2 - 2x - 8 = 0$

1) rce není kvadr. pro $p = 0$, $p = 0: \; -2x - 8 = 0 \rightarrow x = -4$

2) $p \neq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32p}}{2p}$$

$D > 0$	$4 + 32p > 0$	$\rightarrow p > -\frac{1}{8}$	dva různé kořeny
$D = 0$	$4 + 32p = 0$	$\rightarrow p = -\frac{1}{8}$	dvojnásobný kořen
$D < 0$	$4 + 32p < 0$	$\rightarrow p < -\frac{1}{8}$	nemá v R kořen

p	x
$p = 0$	$x = -4$
$p > -\frac{1}{8}$, $p \neq 0$	$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32p}}{2p}$
$p = -\frac{1}{8}$	$x = -8$
$p < -\frac{1}{8}$	nemá v R kořen

12) $(m-1)x^2 - (m-2)x + 2m - 1 = 0$

1) $m = 1$: $x = -1$ (není kvadratická)

2) $m \neq 1$

$$x_{1,2} = \frac{(m-2) \pm \sqrt{(m-2)^2 - 4(2m-1)(m-1)}}{2(m-1)} =$$

$$= \frac{m-2 \pm \sqrt{m^2 - 4m + 4 - 4(2m^2 - 2m - m + 1)}}{2(m-1)} =$$

$$= \frac{m-2 \pm \sqrt{-7m^2 + 8m \cancel{-4} \cancel{+4}}}{2(m-1)} = \frac{m-2 \pm \sqrt{m(8-7m)}}{2(m-1)}$$

$D > 0$: $m(8-7m) > 0$ $\boxed{\text{2 kořeny}}$

$m > 0 \wedge 8 - 7m > 0 \Rightarrow m > 0 \wedge 7m < 8$, $m < \frac{8}{7}$

$\boxed{m \in (0, \frac{8}{7})} \wedge m \neq 1$

$\vee$

$m < 0 \wedge 8 - 7m < 0 \Rightarrow m < 0 \wedge m > \frac{8}{7}$

$\emptyset$

$D = 0$: $\boxed{m = 0 \quad \vee \quad m = \frac{8}{7}}$ $\boxed{\text{1 kořen}}$

$x = 1$ $\qquad x = -3$

$D < 0$: $m(8-7m) < 0$

$m < 0 \wedge 8 - 7m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$

$\vee$ $m > 0 \wedge 8 - 7m < 0 \Rightarrow m \in (\frac{8}{7}, \infty)$

$\boxed{\text{0 kořenů}}$

m	X
1	-1
$(0, \frac{8}{7})$	$x_{1,2} = \frac{m-2 \pm \sqrt{m(8-7m)}}{2(m-1)}$
0	1
$\frac{8}{7}$	-3
$(-\infty, 0) \cup (\frac{8}{7}, \infty)$	$\emptyset$

12

Nerovnice s parametrem

$t \in \mathbb{R}$ (parametr)

13 $2x + t > 0$

$x > -\frac{t}{2}$

t	x
$(-\infty;\infty)$	$(-\frac{t}{2};\infty)$

14 $tx - 2 > 0$

$tx > 2$

$t > 0$

$x > \frac{2}{t}$

$t = 0$

$0 \cdot x > 2$

$\emptyset$

$t < 0$

$x < \frac{2}{t}$

t	x
$(-\infty;0)$	$(-\infty;\frac{2}{t})$
0	$\emptyset$
$(0;\infty)$	$(\frac{2}{t};\infty)$

15 $tx - 2 \geq 2x - t$

$tx - 2x \geq 2 - t$

$x(t-2) \geq 2 - t$

$t - 2 > 0$

$t > 2$

$x \geq \frac{2-t}{t-2}$

$x \geq -1$

$t - 2 = 0$

$t = 2$

$x \cdot 0 \geq 0$

$K = \mathbb{R}$

$t - 2 < 0$

$t < 2$

$x \leq \frac{2-t}{t-2}$

$x \leq -1$

t	x
$(-\infty;2)$	$(-\infty;-1\rangle$
2	$(-\infty;\infty)$
$(2;\infty)$	$\langle -1;\infty)$

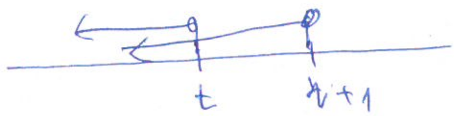
16 $\frac{1}{x-t} \leq 1$ $\qquad x \neq t$

$\frac{1}{x-t} - 1 \leq 0$

$\frac{1-x+t}{x-t} \leq 0$

I. $1-x+t \geq 0 \wedge x-t<0$ $\qquad \pm$

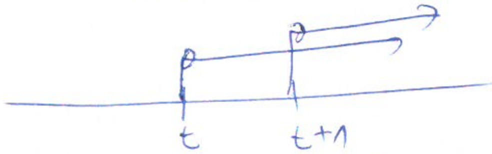
$x \leq 1+t \wedge x<t$



$x \in (-\infty; t)$

II. $1-x+t \leq 0 \wedge x-t>0$ $\qquad \mp$

$x \geq 1+t \wedge x>t$



$x \in \langle t+1; \infty)$

t	x
$(-\infty;\infty)$	$(-\infty; t) \cup \langle t+1; \infty)$

podmínka $x \neq t$ splněna vždy

SOUSTAVY S PARAMETRY (s jedním, postačí)

S JEDNÍM PARAMETREM

1

14

(1) $x+y=p$ — $p\in R$ je parametr

(2) $2x+y=3$ — $x,y\in R$

(1) $x=p-y$

(2) $2\cdot(p-y)+y=3$

$2p-2y+y=3$

$y=2p-3$

$x=-2p+3+p$

$x=-p+3$

$[3-p,\ 2p-3]$

p	$[x,y]$
$p\in R$	$[3-p,\ 2p-3]$ 1 řeš.

2

18

(1) $x+py=-2$ — $p\in R$ je parametr

(2) $(2p-1)x+y=4$ — $x,y\in R$

(1) $x=-2-py$

(2) $(2p-1)(-2-py)+y=4$

$-4p-2p^2y+2+py+y=4$

$y(1+p-2p^2)=2+4p$

$1+p-2p^2\neq 0$

$2p^2-p-1\neq 0$

$p_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\\ 1\end{matrix}\right.$

$-2\cdot(p-1)(p+\frac{1}{2})=0$

$-(p-1)(2p+1)=0$

$\left.\begin{matrix}p\neq 1\\ p\neq -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\ y=\frac{2(1+2p)}{-(p-1)(2p+1)}=\frac{2}{-(p-1)}=\frac{2}{1-p}$

$x=-2+\frac{2p}{p-1}=\frac{-2p+2+2p}{p-1}=\frac{2(1-2p)}{p-1}=\frac{2}{p-1}$

$p=1$: $x+y=-2$ (1), $x+y=4$ (2) — $\emptyset$

$p=-\frac{1}{2}$: $x-\frac{y}{2}=-2$ (1) $/\cdot 2$

$-2x+y=4$ (2)

$0=0$

∞ řešení: $[x,\ 2x+4]$

p	$[x,y]$
$p\neq 1$, $p\neq -\frac{1}{2}$	$\left[\frac{2}{p-1},\ \frac{2}{1-p}\right]$ 1 řeš.
$p=1$	$\emptyset$
$p=-\frac{1}{2}$	$[x,\ 2x+4]$ ∞ řeš.

19

1. např. SČÍTACÍ

$$2x+3y=8 \quad /\cdot(-2)$$
$$4x-y=2$$

$$-7y=-14 \Rightarrow \underline{y=2}$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

2. např. DOSAZOVACÍ

$$2x+a\cdot y=8 \quad (1)$$
$$4x-y=2 \quad (2)$$

$$y=4x-2 \quad (2)$$

$$2x+a(4x-2)=8 \quad (1)$$

$$2x+4ax-2a=8$$

$$x(2+4a)=8+2a$$

$$\cancel{2}x(1+2a)=\cancel{2}(a+4)$$

$a\neq-\frac{1}{2}$

$$x=\frac{a+4}{1+2a}$$

$$y=\frac{4(a+4)}{1+2a}-2=$$

$$=\frac{\cancel{4a}+16-2-\cancel{4a}}{1+2a}=\frac{14}{1+2a}$$

$$[x;y]=\left[\frac{a+4}{1+2a};\frac{14}{1+2a}\right]$$

Zk. $a=3$: $x=\frac{7}{7}=1$

$y=\frac{14}{7}=2$

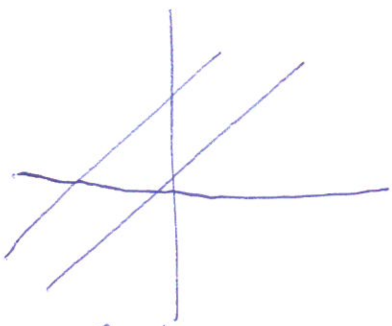
$a=-\frac{1}{2}$

$$x\cdot 0=-\frac{1}{2}+4$$

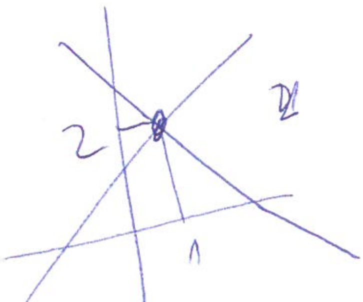
$$\emptyset$$

a	[x, y]	graficky
$-\frac{1}{2}$	$\emptyset$ 0 řeš.	rovnoběžky
$R\setminus\{-\frac{1}{2}\}$	$\left[\frac{a+4}{1+2a};\frac{14}{1+2a}\right]$	různoběžky

graficky:



0 řeš.



1 řeš.

ZADAT NA DOMA

K OPAKOVÁNÍ

Řešte v oboru reálných čísel (p je reálný parametr):

1. $p(x-2) = 3(x+4)$
2. $\frac{2-p}{p} = \frac{2}{x-1}$
3. $2px^2 + px = -1$
4. $p(x-1) \geq x-2$

na doma

př. 8 + př. 18

(4.) $px - p \geq x - 2$

$px - x \geq p - 2$

$x(p-1) \geq p-2$

$p-1>0$	$p-1=0$	$p-1<0$
$p>1$	$p=1$	$p<1$
$x \geq \frac{p-2}{p-1}$	$\cancel{x \geq \frac{p-2}{p-1}}$ $\emptyset$	$x \leq \frac{p-2}{p-1}$
	$x \cdot 0 \geq -1$	
	$\forall x \in R$	

p	x
$(-\infty; 1)$	$\langle \frac{p-2}{p-1}; \infty)$
1	$\cancel{\emptyset}$ $(-\infty; \infty)$
$(1; \infty)$	$(-\infty; \frac{p-2}{p-1}\rangle$

(1.) $p(x-2) = 3(x+4)$

$px - 2p = 3x + 12$

$x(p-3) = 12 + 2p$

$x(p-3) = 2(p+6)$

$p \neq 3$	$p = 3$
$x = \frac{2(p+6)}{p-3}$	$x \cdot 0 = 18$
	$\emptyset$

p	x
3	$\emptyset$
$R \setminus \{3\}$	$\frac{2(p+6)}{p-3}$

(2.) $\frac{2-p}{p} = \frac{2}{x-1}$

$p \neq 0$

$x \neq 1$

$(2-p)(x-1) = 2p$

$2x - 2 - px + p = 2p$

$x(2-p) = p+2$

$p \neq 2$	$p = 2$
$x = \frac{p+2}{2-p}$	$x \cdot 0 = 4$
	$\emptyset$

Zk. pro $x = 1$ (podmínka)

$1 = \frac{p+2}{2-p}$

$2 - p = p + 2$

$0 = 2p$

$p = 0$ ... to ale nemůže nastat

p	x
0	nemá smysl řešit
2	$\emptyset$
$R \setminus \{0; 2\}$	$x = \frac{p+2}{2-p}$

(3.) $2px^2 + px = -1$

$2px^2 + px + 1 = 0$

1) $p = 0$ ... lineární rovnice

$0x^2 + 0x + 1 = 0$ ... $\emptyset$

2) $p \neq 0$ ... kvadratická rovnice

$D = p^2 - 4p = p(p-4)$

a) $D > 0$

$p \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$

$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p(p-4)}}{4p}$

b) $D = 0$

$p = 0$ ... $\emptyset$

$p = 4$ ... $x_1 = x_2 = \frac{-p}{4p} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$

c) $D < 0$

$x_1, x_2 \notin R$

p	x
0	$\emptyset$
$(-\infty; 0) \cup (4; \infty)$	$\frac{-p \pm \sqrt{p(p-4)}}{4p}$
4	$-\frac{1}{4}$