PŘEHLED DĚLITELNOSTI

1 Motivace: zbytkové třídy a jejich grafické znázornění

Pojmy: zápis čísla ve zbytkovém tvaru

Definice 1. *Řekneme, že přirozená čísla a, b patří do stejné zbytkové třídy po dělení $d \in \mathbb{N}$, jestliže dávají stejný zbytek po dělení číslem d.*

$$a \equiv b \Leftrightarrow d|(a-b)$$

→ Důkazy jednoduchých vět o dělitelnosti

2 Definice dělitelnosti

Definice 2. *Mějme přirozená (resp. celá) čísla n, d (v celočíselném případě navíc $d \neq 0$). Pak řekneme, že číslo d dělí číslo n, jestliže existuje přirozené (celé) číslo k tak, že $n = k \cdot d$. Značíme $d|n$.*

Pojmy: dělitel, násobek, být dělitelný, samozřejmí dělitelé, vlastní dělitelé, množina všech dělitelů

Věta 3. *Pro všechna přirozená čísla a, b, d platí:*

1. $d|a \wedge d|b \Rightarrow d|(a \pm b)$
2. $d|d$, $1|d$
3. $d|a \wedge a|b \Rightarrow d|b$
4. $d|a \vee d|b \Rightarrow d|ab$
5. $d|a \wedge d|b \Rightarrow d|z$, *kde z je zbytek po dělení $a : b$*

→ Algoritmus hledání všech dělitelů

3 Prvočísla a čísla složená

Pojmy: prvočíslo, číslo složené, prvočíselný rozklad, prvočinitel.

Věta 4. *Mějme $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pokud číslo n není dělitelné žádným prvočíslem p, $p \leq \sqrt{n}$, pak je n prvočíslo.*

Věta 5 (Základní věta aritmetiky)**.** *Každé přirozené číslo $n > 1$ lze rozložit na součin (mocnin) prvočísel:*

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{r_k},$$

kde p_1, p_2, $\ldots$ p_k jsou prvočísla a $r_1, r_2, \ldots r_k, k \in \mathbb{N}$. Tento rozklad je jednoznačný až na pořadí činitelů.

Věta 6. *Má-li přirozené číslo prvočíselný rozklad tvaru*

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{r_k},$$

pak $|D(n)| = (r_1+1)(r_2+1) \cdot \cdots \cdot (r_k+1)$.

→ Eratosthenovo síto, algoritmus prvočíselného rozkladu a jeho zápisy

4 Znaky dělitelnosti (kritéria, pravidla)

2: Číslo je dělitené dvěma, končí-li jeho zápis číslicí 0, 2, 4, 6, nebo 8.

3, 9: Číslo je dělitelné třemi (devíti), je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi (devíti).

4, 20, 25, 50: Číslo je dělitelné čtyřmi (dvaceti, dvaceti pěti, padesáti), je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi (dvaceti, dvaceti pěti, padesáti).

5: Číslo je dělitené pěti, končí-li jeho zápis číslicí 0, nebo 5.

6: Číslo je dělitelné šesti, je-li dělitelné dvěma a zároveň třemi.

7: *Znak 1*: Číslo je dělitelné sedmi, je-li rozdíl součtů trojčíslí na sudých a lichých místech dělitelný sedmi.

Znak 2: Číslo je dělitelné sedmi, je-li rozdíl zbývající části a dvojnásobku poslední číslice dělitelný sedmi.

8, 40, 200,...: Číslo je dělitelné osmi, je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné osmi.

10: Číslo je dělitelné deseti, končí-li jeho zápis číslicí 0.

11: Číslo je dělitelné jedenácti, je-li rozdíl součtů číslic na lichých a sudých pozicích dělitelný jedenácti (nebo nula).

Věta 7 (Znak dělitelnosti složeným číslem)**.** *Nechť (složené) přirozené číslo d má prvočíselný rozklad*

$$d = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}.$$

Pak libovolné číslo n je dělitelné číslem d, pokud je dělitelné každou z mocnin $p_1^{r_1}$, $p_2^{r_2}$,... $p_k^{r_k}$ prvočinitelů jeho rozkladu.

5 Společní dělitelé, společné násobky

Pojmy: společný dělitel a jejich množina, největší společný dělitel; soudělná a nesoudělná čísla; společný násobek, nejmenší společný násobek

Definice 8. *Číslo d je společným dělitelem čísel a, b, jestliže $d|a$ i $d|b$.*

Definice 9. *Číslo n je společným násobkem čísel a, b, jestliže $a|n$ i $b|n$.*

→ Algoritmy hledání největšího společného dělitele (vypsáním všech dělitelů, pomocí prvočíselného rozkladu, Eukleidův algoritmus), algoritmus hledání nejmenšího společného násobku.

Věta 10. *Pro každá dvě přirozená čísla a, b platí $ab = D(a;\, b) \cdot n(a;\, b)$.*

→ Slovní úlohy o dělitelnosti