3. ČÍSELNÉ OBORY

1 Číselné obory, číselné množiny a jejich vlastnosti

1. Zakreslete Vennův diagram pro množiny reálných, celých, přirozených, komplexních a racionálních čísel. Zakreslete do něj pak čísla -2; $-\sqrt{3}$; $-0{,}4$; 0; π; $\sqrt[4]{16}$; $\log 3$; $\cos \pi$.
2. Rozhodněte, zda platí:
   (a) Jestliže je číslo celé, pak je i přirozené.
   (b) Jestliže je číslo přirozené, pak je i celé.
   (c) Jestliže je číslo racionální, pak je i komplexní.

2 Zápisy čísel a jejich vlastnosti

1. Zapište:
   (a) číslo $402{,}053$ rozvinutým zápisem v desítkové soustavě;
   (b) číslo $3,05$ jako zlomek v základním tvaru;
   (c) číslo 4 jako periodické číslo;
   (d) číslo 3 jako zlomek v základním tvaru;
   (e) číslo $4,\overline{24}$ jako smíšené číslo.
2. Zapište zlomkem v základním tvaru čísla:
$$\frac{504}{420}, \quad \frac{18\,590}{9\,801}$$
3. Najděte trojciferné přirozené číslo, pro které platí:
   (a) Na místě jednotek je číslice 1.
   (b) Pokud poslední číslici přesuneme na první místo, číslo se zmenší o 207.

3 Číselná osa

1. Načíselné ose jsou čísla -2 a 12 zakresleny 70 cm od sebe. Jaká je jednotka číselné osy?
2. Na číselné ose jsou znázorněny čísla 0 a 1. Pomocí pravítka a kružítka sestrojte obrazy čísel 3; -2; $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $3{,}2$.
3. Na číselné ose znázorněte:
   (a) všechna reálná čísla splňující $|x+3| = 5$;
   (b) všechna celá čísla $|x+3| = 5$;
   (c) všechna přirozená čísla $|x+3| = 5$.
4. Na číselné ose s jednotkou délky 12 mm znázorněte všechny přirozené dělitele čísla
$$\frac{4^5 \cdot 3^7}{(6^3 \cdot 2)^2}.$$

4 Operace s čísly a jejich vlastnosti

1. U následujících operací rozhodněte, zda jsou komutativní, asociativní:
   (a) sčítání celých čísel;
   (b) odčítání racionálních čísel;
   (c) násobení iracionálních čísel;
   (d) dělení reálných čísel.
2. Rozhodněte, zda platí:
   (a) Obor přirozených čísel je uzavřený vůči operaci dělení.
   (b) Obor celých čísel je uzavřený vůči operaci odčítání.
   (c) Operace násobení racionálních čísel má neutrální prvek.
   (d) Operace sčítání reálných čísel má neutrální prvek.
3. Je dáno číslo 10. Určete k němu:
   (a) číslo převrácené;
   (b) číslo opačné;
   (c) číslo komplexně sdružené.
4. Vypočtěte co nejúsporněji:

$$\begin{array}{ll}(a) & 46+21+14+79= \\ (b) & 8\cdot 427+12\cdot 427= \\ (c) & 501\cdot 499= \\ (d) & 53\cdot 36-53\cdot 26=\end{array}$$

5 Dělitelnost přirozených čísel

1. Zapište množinu všech dělitelů čísla: (a) 60; (b) 735.
2. Určete prvočíselný rozklad čísel: (a) $24\,552$; (b) $51\,300$.
3. Najděte největšího společného dělitele D čísel:
   (a) 225 a 45
   (b) 48 a 120
   (c) $4\,500$ a $33\,000$
4. Najděte nejmenší společný násobek n čísel:
   (a) 42 a 36
   (b) 63 a 91
5. Určete $D(a;\,b)$ a $n(a;\,b)$ daných dvojic čísel a, b a ověřte platnost vztahu $D(a;\,b)\cdot n(a;\,b)=ab$:
   (a) $a=30, b=40$
   (b) $a=132, b=66$
   (c) $a=27, b=48$

6. Místo hvězdičky doplňte (všemi možnými způsoby) v čísle $72\,4{*}2$ jednu číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné:
   (a) dvěma
   (b) třemi
   (c) čtyřmi
   (d) pěti
   (e) šesti
   (f) devíti
   (g) jedenácti

6 Výrazy s mocninami a odmocninami

1. Vypočítejte:

$$(a) \qquad \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5} =$$

$$(b) \qquad \frac{(5^3 \cdot 2^2)^2}{(2 \cdot 5)^4} =$$

$$(c) \qquad \frac{(-\pi)^5 \cdot (-e)^8}{[(-\pi)^2 \cdot (-e)^3]^3} =$$

2. Částečně nebo úplně odmocněte:

$$\sqrt{4500}, \quad \sqrt[3]{2704}, \quad \sqrt[4]{2560}, \quad \sqrt{0,004\,9}, \quad \sqrt{1,96}$$

3. Zjednodušte:

$$(a) \qquad 7\sqrt{2} + 5\sqrt{4} - 3\sqrt{8} - \sqrt{16} =$$

$$(b) \qquad \frac{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1}} =$$

$$(c) \qquad \frac{110}{\sqrt{11} + 1} =$$

$$(d) \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} =$$

$$(e) \qquad \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} =$$

7 Absolutní hodnota

1. Vypočítejte:

$$\frac{|\sqrt{5} - 2\pi|}{\sqrt{5} - 2\pi} =$$

2. Vypočtěte:

$$(a) \qquad \left| \frac{1 - |-8| - |8|}{1 + \big||-8|\big|} \right| =$$

$$(b) \qquad \left|\sqrt{5} - \sqrt{6}\right| + \left|\sqrt{5} + \sqrt{6}\right| =$$

3. Dokažte, že platí: $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x^2| = x^2$

4. Dokažte, že platí: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

8 Komplexní čísla

1. Zapište v algebraickém tvaru:

$$
\begin{aligned}
&(a) \qquad z = (3-4i) - (2+i)(3-2i) \\
&(b) \qquad z = \frac{12+4i}{(2i)^3} + i^{83} - i^{132} \\
&(c) \qquad z = \frac{6-43i}{5-2i} \\
&(d) \qquad z = \frac{1+2i+|4-3i|}{\left|\sqrt{8} - |1+i|\right|}
\end{aligned}
$$

2. U čísla $z = 5(\cos \frac{9}{4}\pi - i \sin 12{,}5\pi)$ určete:
   (a) reálnou část;
   (b) imaginární část;
   (c) absolutní hodnotu;
   (d) komplexní jednotku s desetkrát menší imaginární částí, než je imaginární část čísla z.
3. Určete obsah mnohoúhelníku v komplexní rovině, jehož vrcholy leží v bodech $z = 3+2i$, $\overline{z}$, $-z$, $\overline{-z}$.
4. V komplexní rovině zakreslete všechna komplexní čísla z splňující:
   (a) $|z| = 2$;
   (b) $|z| = |4-i|$;
   (c) $|z+2+i| < 3$;
   (d) $|z| \geq |\overline{z}|$.
5. Určete goniometrický tvar čísel:
   (a) $-4+4i$
   (b) $1+\sqrt{3}i$
   (c) $3-5i$
   (d) $1+\cos\varphi + i\sin\varphi$, kde $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$
6. Vyjádřete v goniometrickém tvaru čísla uv, $\frac{u}{v}$, $\frac{v}{u}$, u^5, v^{-3}, jestliže
$$u = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ), \qquad v = 0{,}5(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ).$$
7. Rozložte na součin lineárních činitelů:
   (a) x^2+9
   (b) x^3+1
   (c) $x^2+8ix-15$
   (d) $x^2-(1+2i)x-7+i$
8. Řešte rovnice v $\mathbb{C}$:
   (a) $(3+i)z-2 = 5-(1-2i)z$
   (b) $(1+i)z+(3-2i)\overline{z} = -11-11i$
   (c) $x^2+6x+10=0$
   (d) $x^2+(5+i)x+(12+5i)=0$
   (e) $x^6+8i=0$
9. Určete všechny kořeny binomické rovnice 4. stupně, je-li jeden z kořenů roven číslu $-5-2i$.