

Matematické důkazy

Logická výstavba matematiky

Předměty matematické teorie jsou nějaké objekty (body, čísla...), jejich vlastnosti, vztahy a operace, které vedou na nové objekty.

O objektech matematické teorie je třeba nashromáždit co nejvíce matematických vět. Aby bylo možné pojmut nějaký výrok jako větu, musí být dokázán v rámci této teorie. V ideální teorii by tedy všechny věty měly být dokazatelné. To ale nelze uskutečnit, neboť abychom dokázali nějakou větu, používáme jako předpokladů věty již dokázané. K jejich důkazu opět potřebujeme dokázané věty atd... Vytvoříme řetězec důkazů, ale nelze postupovat donekonečna. Není logicky přípustný důkaz kruhem – tj. nejsou přípustné závěry, které obsahují již ve formě předpokladů dokazované výroky.

Proto na začátek teorie umístíme nedokázané a nedokazatelné výroky, tzv. základní věty (axiómy, postuláty), které obsahují vše, co je potřebné ke zdůvodnění vět ostatních. Je jich většinou konečný počet. Pojmy a vztahy obsažené v axiómách se pokládají za základní pojmy.

Z těchto základních pojmů odvozujeme všechny ostatní pojmy pomocí definic. Definice je zavedení nového matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo dříve definovaných. Definice vymezuje podstatné (charakteristické) vlastnosti zaváděného pojmu.

Další vlastnosti matematických pojmů se vyjadřují v matematických větách. Matematická věta je takový pravdivý výrok matematické teorie, který se dá dokázat, tj. logicky odvodit pomocí axiómů, definic a dříve dokázaných vět.

Rozeznáváme dva základní druhy matematických vět: obecné věty $(\forall x \in D : V(x))$ a existenční věty $(\exists x \in D : V(x))$. Výroková forma $V(x)$ v obecné větě má zpravidla tvar $A(x) \Rightarrow B(x)$, přičemž $A(x)$ je předpoklad věty (postačující podmínka pro platnost $B(x)$), $B(x)$ je závěr (tvrzení) (nutná podmínka pro platnost $A(x)$). Speciálně má-li $V(x)$ tvar ekvivalence $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, pak $A(x)$ je nutnou i postačující podmínkou pro platnost $B(x)$ a naopak.

Důkazy obecných vět $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$

1. Přímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v sestavení řetězce implikací $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q$, z čehož plyne, že platí dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$.
2. Nepřímý důkaz implikace $p \Rightarrow q$ spočívá v přímém důkazu její obměny $\neg q \Rightarrow \neg p$, která je s ní logicky ekvivalentní.
3. Důkaz sporem výroku v spočívá v tom, že vyjdeme z předpokladu platnosti negace výroku v , tj. $\neg v$, (speciálně $p \wedge \neg q$) a přímým důkazem $\neg v \Rightarrow \neg v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_n \Rightarrow s$ dospějeme k výroku s , který neplatí (spor), a tedy neplatí $\neg v$ a platí dokazovaný výrok v .
4. Matematická indukce – důkaz se užívá v oboru N . Touto metodou se dokazují věty typu: $\forall n \in N, n \geq n_0 : V(n)$. Princip důkazu spočívá ve dvou krocích:

I.krok: Dokážeme, že věta platí pro $n=n_0$.

II.krok(indukční předpoklad): Dokážeme, že pro každé $k \in N, k \geq n_0$ platí implikace

$$V(k) \Rightarrow V(k+1).$$

Důkazy existenčních vět $\exists x \in D : V(x)$

1. Přímý existenční důkaz spočívá v zjištění existence alespoň jednoho objektu $x \in D$ požadovaných vlastností. Jde buď o důkaz ryze existenční nebo o důkaz konstrukční, kdy se takový objekt přímo určí (zkonstruuje).
2. Důkaz sporem spočívá v tom, že se vychází z předpokladu neexistence objektu $x \in D$ požadovaných vlastností a dojde se k logickému sporu.

Důkazy vět o existenci a unicítě (jednoznačnosti) $\exists! x \in D : V(x)$

1. Ryze existenční důkaz jednoznačné existence spočívá ve dvou krocích:
 - a) dokáže se existence alespoň jednoho objektu požadovaných vlastností důkazem existenční věty $\exists x \in D : V(x)$
 - b) Dokáže se *věta o unicítě*: „Existuje nejvýše jedno $x \in D$, pro které platí $V(x)$.“
2. Ryze existenční důkaz jednoznačné existence spočívá v tom, že se přímo určí objekt $x \in D$ požadovaných vlastností a dokáže se, že další objekt těchto vlastností neexistuje.

Důkazy hypotéz

Důkazem hypotézy se rozumí logické ověření její pravdivosti (důkaz její platnosti). Vyvrácením hypotézy se rozumí logické prověření její neplatnosti (důkaz neplatnosti). Vyvrácení obecné hypotézy se nazývá nalezení protipříkladu. Vyvrácení existenční hypotézy se obvykle provádí sporem.

1. Dokažte přímo: „Druhá mocnina libovolného lichého čísla je liché číslo.“
2. Dokažte a) nepřímo, b) sporem: „Pro každé celé číslo m platí: Je-li m^2 liché číslo, pak také číslo m je liché.“
3. Dokažte věty: a) $\forall n \in \mathbb{N} : 5/n \Rightarrow 30/n^3 - n$ b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2Xn \Rightarrow 16/n^4 - 1$.
4. Dokažte věty: a) $\forall n \in \mathbb{N} : 5/(n^2 + 1) \Rightarrow 5Xn$ b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3/(n^2 + 1) \Rightarrow 6Xn$.
5. Dokažte matematickou indukcí: a) $\forall n \in \mathbb{N} : 4/2n^2 + 2n$ b) $6/n^3 + 11n$.
6. Dokažte matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
7. Dokažte matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N} : 30/11^{4n+1} - 11$.
8. Dokažte matematickou indukcí: a) $2^{n+2} > 2n + 5$
b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1$.
9. Dokažte matematickou indukcí: $\forall n \in \mathbb{N} : 225/16^n - 15n - 1$.
10. Dokažte matematickou indukcí vztah pro počet úhlopříček n -úhelníka.
11. Dokažte matematickou indukcí binomickou větu.
12. V knihovně je 1200 svazků knih a v žádné z nich není více než 1000 stran. Dokažte, že v této knihovně jsou alespoň dvě knihy se stejným počtem stran. (*použijte ryze existenční důkaz založený na Dirichletově principu*).
13. Dokažte větu: Existuje právě jedno prvočíslo p , pro které je $p^2 + 2$ též prvočíslem.
14. Dokažte, že rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen.
15. Dokažte: Dvě různé přímky v rovině nebo v prostoru mají nejvýše jeden společný bod.
16. Dokažte, že číslo $\sqrt{3}$ je iracionální.
17. Dokažte, že číslo $\log 2$ je iracionální.
18. Prověřte hypotézy: $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 11$ je a) liché číslo, b) prvočíslo.
19. Vyvráťte (obecnou) hypotézu: $\forall n \in \mathbb{N} : 2^{2n} + 1$ je prvočíslo.
20. Vyvráťte (existenční) hypotézu: $\exists x \in \mathbb{R} : x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.