

Číselné soustavy

Jana Kalová
Gymnázium, Jírovцова 8, České Budějovice

4. února 2016

1. **Příklad:** Dvojciferné číslo má ciferný součet rovný 9. Jestliže vzájemně vyměníme obě číslice, dostaneme nové číslo, které je o 45 větší než číslo původní. Určete toto číslo.

Řešení:

Původní dvojciferné číslo označíme xy . Jeho rozvoj v desítkové soustavě je $10x+y$. Po výměně číslic dostaneme číslo yx s rozvojem $10y+x$. Ze zadání sestavíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}x + y &= 9 \\ 10y + x - 45 &= 10x + y\end{aligned}$$

Řešením soustavy je $x = 2, y = 7$, řešením úlohy pak číslo $xy = 27$.

2. **Příklad:** Čtyřciferné číslo je zakončeno číslicí 2. Posuneme-li tuto číslici na první místo a ostatní tři ponecháme beze změny, dostaneme číslo o 234 větší než číslo původní. Určete původní číslo.

Řešení:

Hledané čtyřciferné číslo označíme $abc2$. Po posunutí číslice 2 na první místo dostaneme číslo $2abc$. Ze zadání sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned}2 + 10c + 100b + 1000a &= c + 10b + 100a + 2000 - 234 \\ 900a + 90b + 9c &= 1764 \\ 100a + 10b + c &= 196\end{aligned}$$

Řešení rovnice je jediné: $c = 6, b = 9, a = 1$.
Zadání tedy vyhovuje číslo 1962.

3. **Příklad:** Které dvojciferné číslo se po vzájemné výměně obou číslic zvětší o 37?

Řešení:

Původní dvojciferné číslo označíme xy . Jeho rozvoj v desítkové soustavě je $10x+y$. Po výměně číslic dostaneme číslo yx s rozvojem $10y+x$.

Ze zadání sestavíme rovnici:

$$10x + y + 37 = 10y + x$$

$$9x - 9y = -37$$

$$9(y - x) = 37$$

$$y - x = \frac{37}{9}$$

Protože x, y jsou přirozená čísla, jejich rozdíl nemůže být $\frac{37}{9}$. Úloha nemá žádné řešení.

4. **Příklad:** Na stole ležely tři kartičky s různými ciframi. Nejprve z nich složili největší možné trojciferné číslo a potom druhé největší. Součet obou takto vzniklých čísel je 1233. Jaké cifry byly na kartičkách?

Řešení:

Cifry na kartičkách označíme a, b, c a bez újmy na obecnosti zvolíme např. $a > b > c$.

Největším číslem bude abc , jeho desítkový rozvoj je $100a + 10b + c$.

Druhým největším pak acb s desítkovým rozvojem $100a + 10c + b$.

Ze zadání sestavíme rovnici:

$$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) = 1233$$

$$200a + 11b + 11c = 1233$$

$$200a + 10(b + c) + (b + c) = 1233$$

Na místě jednotek a desítek je součet cifer $b + c$, platí tedy $b + c = 3$.

V úvahu připadají dvě dvojice $b = 3, c = 0$ nebo $b = 2, c = 1$. Číslici a vypočteme z rovnice $200a = 1200$, platí tedy $a = 6$.

Úlohu řeší dvě čísla: $abc = 630$ nebo $abc = 621$.

5. **Příklad:** Zaměníme-li pořadí číslic jistého dvojciferného čísla, dostaneme dvojciferné číslo, jehož součet s původním číslem je 88 a rozdíl po odečtení od původního čísla je 36. Určete původní číslo.

Řešení:

Původní dvojciferné číslo označíme xy . Jeho rozvoj v desítkové soustavě je $10x + y$. Po výměně číslic dostaneme číslo yx s rozvojem $10y + x$.

Ze zadání sestavíme soustavu lineárních rovnic:

$$10x + y + 10y + x = 88$$

$$10x + y - 10y - x = 36$$

Tato soustava má právě jedno řešení $x = 6, y = 2$.

Řešením úlohy je číslo 62.

6. **Příklad:** Zaměníme-li pořadí číslic jistého dvojciferného čísla, dostaneme dvojciferné číslo, jehož součet s původním číslem je 88. Určete

původní číslo.

Řešení:

Původní dvojciferné číslo označíme xy . Jeho rozvoj v desítkové soustavě je $10x+y$. Po výměně číslic dostaneme číslo yx s rozvojem $10y+x$. Ze zadání sestavíme rovnici:

$$10x + y + 10y + x = 88$$

$$11x + 11y = 88$$

$$x + y = 8$$

Rovnici vyhovují hodnoty $x = 1, y = 7$; $x = 2, y = 6$; $x = 3, y = 5$; $x = 4, y = 4$; $x = 5, y = 3$; $x = 6, y = 2$; $x = 7, y = 1$.

Úloha má 7 řešení: 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71.

7. **Příklad:** Vypočtete základ z soustavy, jestliže platí : $(234)_z = (94)_{10}$.

Řešení:

Použijeme rozšířený zápis čísla s neznámým základem z a sestavíme rovnici, která vyhovuje zadání:

$$2z^2 + 3z + 4 = 94$$

$$2z^2 + 3z - 90 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice je $z = 6$ a $z = -\frac{15}{2}$.

Úloha má jediné řešení $z = 6$.

8. **Příklad:** Vypočtete základ soustavy z , jestliže platí :

$$(521)_z = (424)_z + (64)_z.$$

Řešení:

Použijeme rozšířený zápis zadaných čísel s neznámým základem z a sestavíme rovnici, která vyhovuje zadání:

$$5z^2 + 2z + 1 = (4z^2 + 2z + 4) + (6z + 4)$$

$$z^2 - 6z - 7 = 0$$

Řešením kvadratické rovnice je $z = 7$ a $z = -1$.

Úloha má jediné řešení $z = 7$.

9. **Příklad:** Obsah skříně je jednoslabičné slovo, jehož jednotlivými písmeny začínají tři různé číslice. Prostřední číslice je o 1 menší než součin obou krajních. Součet prvních dvou číslic se rovná číslici poslední. Vynecháním této poslední číslice zbyde dvojciferné číslo, které se rovná součtu všech tří číslic daného čísla. Co je ve skříně?

Řešení:

Číslice označíme a, b, c . Ze zadání sestavíme soustavu rovnic:

$$b + 1 = a \cdot c$$

$$a + b = c$$

$$10a + b = a + b + c$$

Soustava má jediné řešení $a = 1, b = 8, c = 9$.

Ve skříni je tedy jod.

10. **Příklad:** Na Zemi přiletěli mimozemšťané. Všichni mají na hlavě stejný počet tykadel a nemají žádné prsty. Tito mimozemšťané mívají hodně dětí. Jeden z nich prohlásil, že má 32 dcer a 44 synů, což je v jejich zápisu čísel 106 dětí. Kolik měl na hlavě tykadel?

Řešení:

Vypočítáme základ číselné soustavy, kterou mimozemšťané používají:

$$(32)_z + (44)_z = (106)_z$$

$$(3z + 2) + (4z + 4) = z^2 + 6$$

$$z^2 - 7z = 0$$

Řešením kvadratické rovnice je $z = 7$ a $z = 0$, úloze vyhovuje jen $z = 7$. Základem číselné soustavy je zřejmě počet tykadel. Pak bude mít mimozemšťan 7 tykadel.