

Mechanika hmotných těles

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Snads

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Mechanika se zabývá především pohybem těles v prostoru, příčinami změn pohybového stavu těles, změnami velikostí a tvaru hmotných těles, silami a jejich působením.

Mechaniku rozdělujeme na: **kinematiku** a **dynamiku**. Součástí mechaniky je často uváděna též **mechanika kontinua**.

Kinematika

Zabývá se zákony pohybu těles bez ohledu na příčinu vzniku pohybového stavu těles.

Dynamika

Zabývá se souvislostí mezi pohybovým stavem hmotných těles a silovým působením. Speciálně pak rovnováhu sil.

Mechanika kontinua

Zabývá se mechanikou tekutin, pružností a pevností těles

Prostor a čas

Newtonovo pojetí času a prostoru

Newtonovo pojetí času předpokládá, že se časové údaje t a t' ve dvou vztažných soustavách S a S' liší nejvýše o konstantu t_0 , kterou můžeme položit rovnu 0. Čas je podle Newtona **absolutní** a tedy:

$$t' = t + t_0$$

Prostor je nehmotný (prázdný), absolutně prostupný, trojrozměrný, spojitý, homogenní, izotropní, nepohyblivý, jeho univerzální geometrie je euklidovská. Newton zavádí pojem **absolutní prostor**.

Absolutnost znamená, nezávislost na hmotě a pohybu, prostor je brán jako jakási „nádobka na hmotu“.

Reálná tělesa aproximujeme tzv. **hmotným bodem**. **Hmotný bod** je idealizovaný bezrozměrný objekt o hmotnosti rovné hmotnosti reálného tělesa, nebereme tedy v úvahu deformace těles ani jejich rotaci.

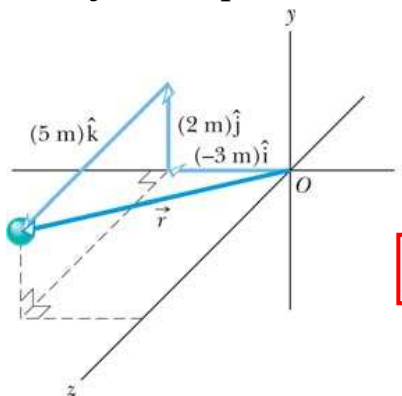
Pohyb hmotného bodu

Základní fyzikální charakteristiky pohybu tělesa jsou:

- Poloha vzhledem k zvolené souřadné soustavě (polohový vektor)
- Změna polohy tělesa v čase (posunutí tělesa)
- Dráha po níž se těleso pohybuje
- Rychlost pohybu
- Změna rychlosti pohybu tělesa (zrychlení)

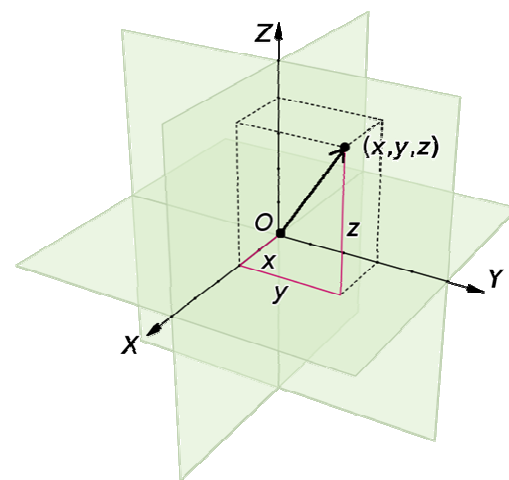
Pohyb tělesa znamená, změnu polohy vzhledem k jeho okolí. Změny polohy tedy vztahujeme vždy vzhledem k vybranému okolnímu objektu - **referenčnímu tělesu**.

Z praktických důvodů spojujeme s referenčním tělesem referenční **souřadnicovou soustavu**. Poloha hmotného bodu ve zvolené soustavě souřadnic je určena **polohový vektorem** vycházejícím z počátku souřadnicové soustavy.



$$\vec{r} = (-3 \vec{i} + 2 \vec{j} + 5 \vec{k}) [m]$$

$$x = -3, y = 2, z = 5$$

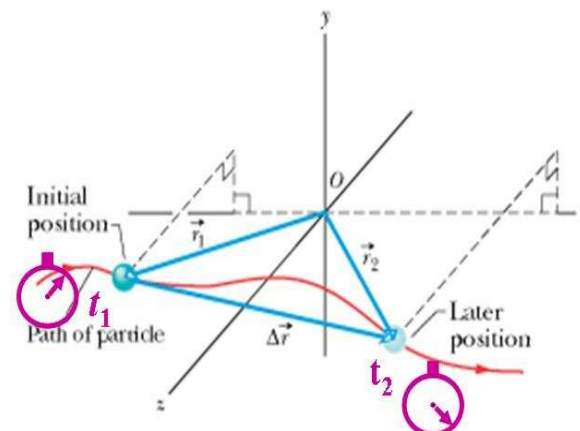


$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

x, y, z : souřadnice bodu,
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: jednotkové vektory ve směru jednotlivých souřadných os.

Posunutí tělesa

Posunutí definujeme jak rozdíl polohových vektorů koncového a výchozího bodu. Posunutí je vektorovou veličinou, je charakterizováno velikostí a směrem.



$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \\ \vec{r}_1 &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\end{aligned}$$



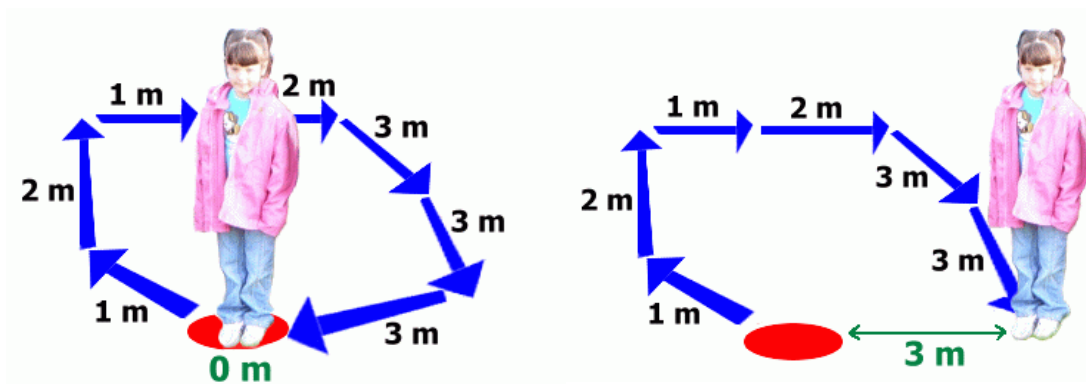
$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{\Delta r} &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k} \\ \vec{\Delta r} &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \\ \Delta z &= z_2 - z_1\end{aligned}$$

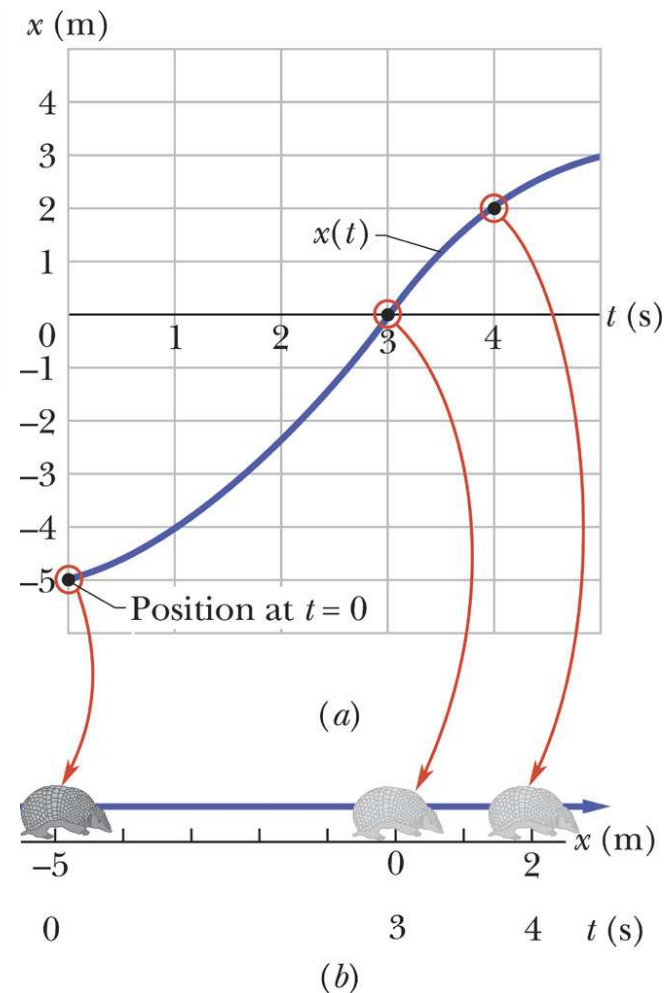
Je nutné rozlišovat mezi přemístěním a celkovou uraženou dráhou. Ve zvláštním případě je jejich velikost stejná.

Posunutí a skutečně překonaná vzdálenost jsou obecně různé.



Způsoby popisu pohybu tělesa

- Tabulkou, v jednom sloupci zaznamenáme vzdálenost tělesa od počátku v okamžiku měření, ve druhém pak čas
- Nakreslíme graf závislosti změřené hodnoty vzdálenosti od počátku na čase v němž jsme vzdálenost měřili.
- Matematickým vzorcem.



Graf závislosti $x(t)$ pohybujícího se pásavce.

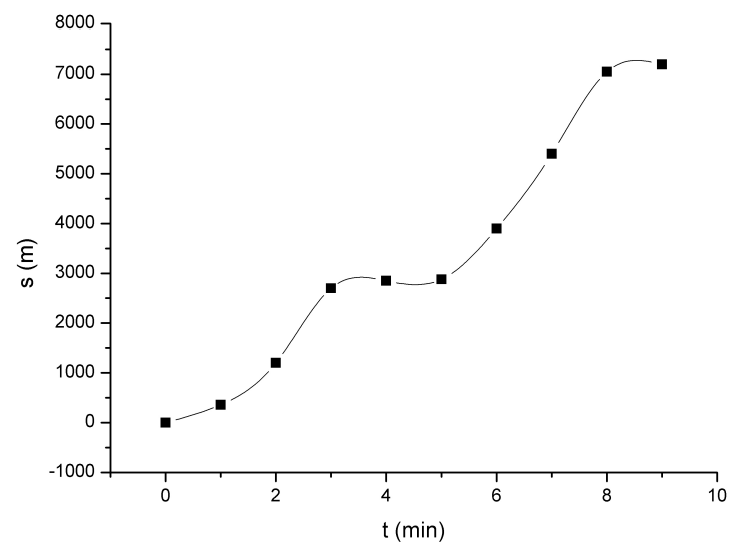
Pohyb a jak ho popsát

A) tabulkou, B) graficky, C) vzorcem:

A)

t [min]	s [m]
0	0
1	360
2	1200
3	2700
4	2850
5	2880
6	3900
7	5400
8	7050
9	7200

B)



C) Nalezneme matematický vztah, z něhož dokážeme určit polohu v libovolném okamžiku.

Problémy s pochopením rychlosti. Zenonův paradox.

Zenon z Elea okolo roku 450 př.n.l.

Uspořádejme závod Achile a želvy za následujících podmínek:

- 1) želva má 100 metrový náskok před Achilem
- 2) Achilles, je 10 x rychlejší než želva.
- 3) želva a Achilles vyběhnou ve stejný okamžik

Ptejme se dohoní Achilles želvu ?

Zenon tvrdí: Ne, Achilles nikdy nedohoní želvu!



Zenonovo zdůvodnění:

Má-li želva na počátku náskok 100 metrů, potom v okamžiku, kdy Achilles proběhne těchto 100 metrů bude želva 10 metrů před Achilem, v okamžiku, kdy Achilles uběhne těchto 10 metrů, želva bude o metr před Achilem, proběhne-li Achilles tento metr, želva bude před Achilem o 10 cm a takto bude závod probíhat do nekonečna a Achilles tedy nikdy nedohoní želvu.

Otázka: Co je na Zenonově argumentaci chybné?

Rychlost pohybu

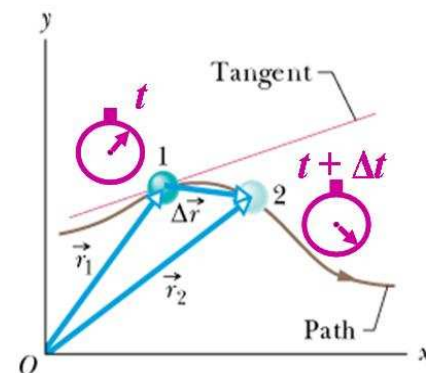
Průměrná rychlost (fyzikální):

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

Průměrná rychlost („občanská“):

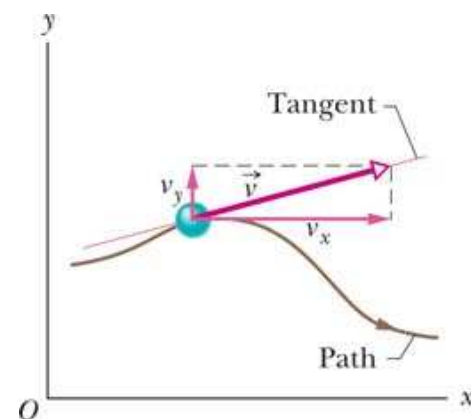
$$s_{avg} = \frac{\text{celková vzdálenost}}{\Delta t}$$



„Občanská“ průměrná rychlost není vektorovou veličinou a z fyzikálního hlediska nemá prakticky žádný význam.

Smysluplnější charakteristikou pohybu než je průměrná rychlost je **okamžitá rychlost**

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \end{aligned}$$



Okamžitá rychlost je vektorová veličina, vektor rychlosti a má směr tečny k dráze. Jednotkou rychlosti je ms⁻¹.

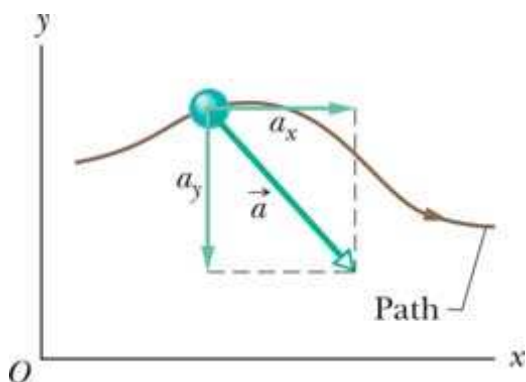
Zrychlení-změna rychlosti pohybu

Změnu rychlosti pohybu charakterizuje veličina **zrychlení**.
Jednotkou zrychlení je ms^{-2} .

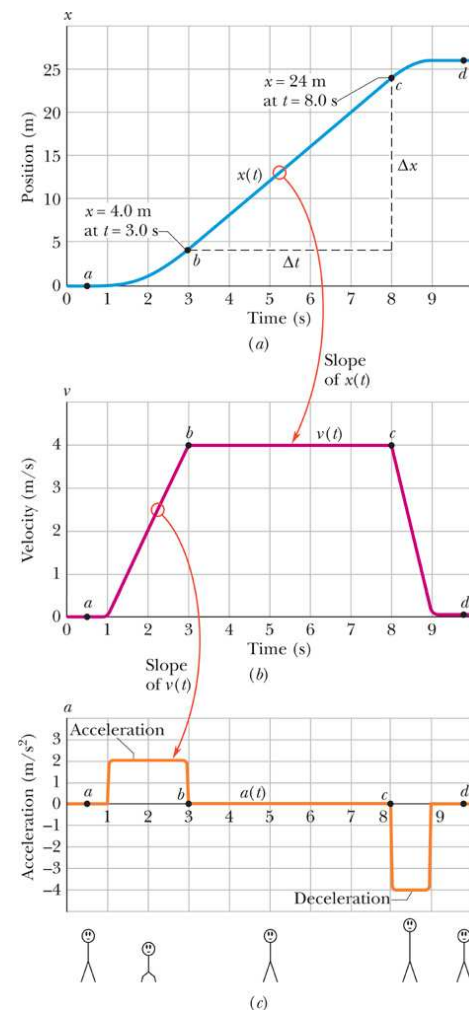
Průměrné zrychlení:
$$\vec{a}_{avg} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Okamžité zrychlení:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \right) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$



Rozklad zrychlení do složek při pohybu po zakřivené dráze.



Příklad: Pohyb výtahu.

- Dráha kabiny,
- Rychlost kabiny,
- Zrychlení kabiny a pocity cestujících

Pohyb s konstantním zrychlením

Platí rovnice: $a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt$

Integrací obou stran rovnice dostaneme:

$$\int dv = \int a dt = a \int dt \rightarrow v = at + C$$

C je integrační konstanta, její hodnotu určíme z počátečních podmínek, to je rychlost v čase $t = 0$.

$$v(0) = v_0 = (a)(0) + C \rightarrow C = v_0$$

Dosazením za konstantu dostaneme výslednou rovnici pro rychlost:

$$v = v_0 + at$$

Platí rovnice: $v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt = (v_0 + at) dt = v_0 dt + at dt$

Integrací obou stran rovnice dostaneme: $\int dx = \int v_0 dt + a \int t dt \rightarrow x = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C'$

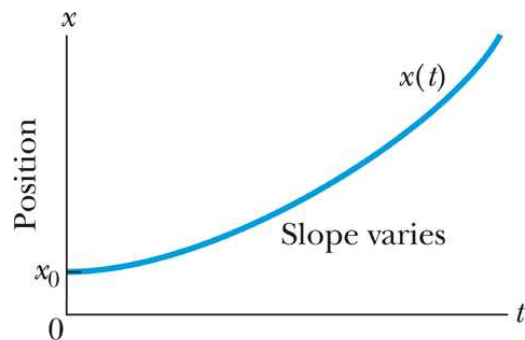
Integrační konstantu C určíme opět z počátečních podmínek, to je polohy v čase $t = 0$.

$$x(0) = x_0 = (v_0)(0) + \frac{a}{2}(0) + C' \rightarrow C' = x_0$$

Dosazením za konstantu dostaneme výslednou rovnici pro dráhu:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Pohyb s konstantním zrychlením

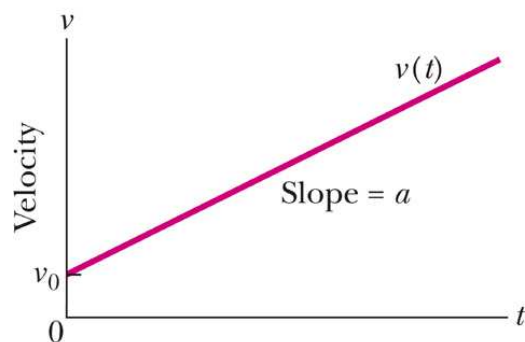


(a)

Vyloučením času z rovnic:

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



(b)

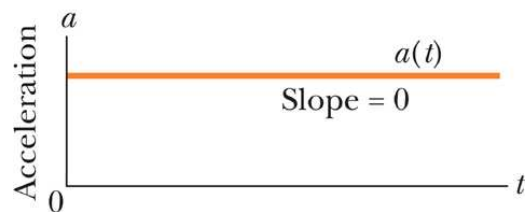
získáme užitečnou rovnici:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Speciální případ pohybu s konstantním zrychlením je volný pád.

Zrychlení volného pádu v blízkosti zemského povrchu

$$a = g = -9,8 \text{ ms}^{-2}.$$



(c)

Pohyb hmotného bodu v pohybující se referenční soustavě - Galileiova transformace rychlostí

Vztah mezi polohovými vektory bodu P v referenčních souřadných soustavách A a B:

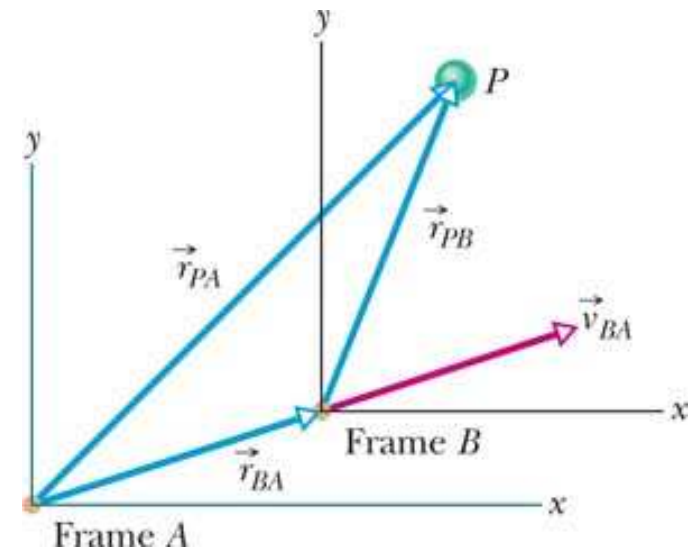
$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{PB}$$

Předpokládejme, že soustava B se pohybuje vzhledem k soustavě A **konstantní rychlostí** $\vec{v}_{BA}$. Pak pro polohový vektor spojující počátky obou pohybujících se soustav $\vec{r}_{BA}$ platí:

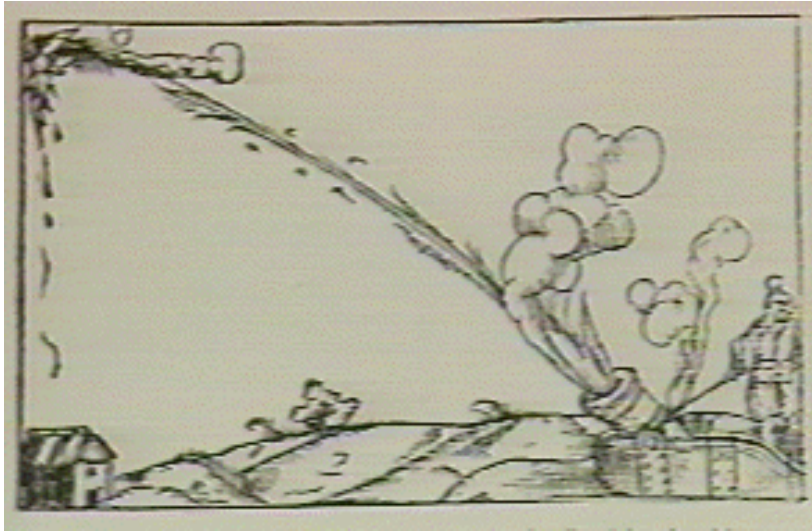
$$\vec{r}_{BA} = \vec{v}_{BA}t \Rightarrow \vec{r}_{PA} = \vec{v}_{BA}t + \vec{r}_{PB}$$

Derivací pak dostaneme transformační vztah mezi vektory rychlosti objektu P v obou referenčních soustavách:

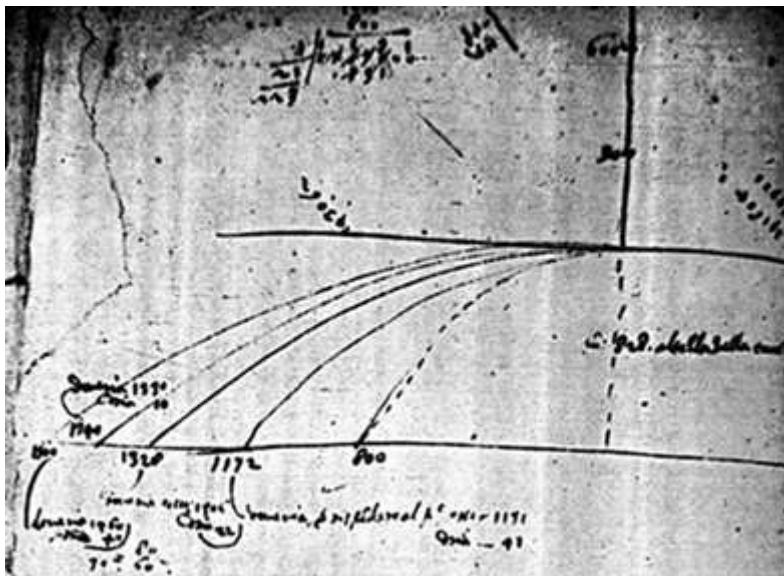
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}$$



Šikmý vrh v gravitačním poli, analýza pohybu projektilu



Obecná představa o pohybu projektilu před Galileem byla založena na názorech Jeana Buridana (asi 1300-1358), [teorii impetu](#). Impetus - „pohybová síla“, kterou objekt na počátku získá od okolních těles a kterou postupně v důsledku pohybu ztrácí odporujícím prostředím zmenšuje. Náboj se po vystřelení pohybuje po přímce tak dlouho, až ztratí veškerý na počátku výstřelu získaný impetus a spadne přímo dolů na zem.



Studie pohybu projektylu, záznam experimentu z pracovního deníku Galilea Galileiho **Galileo Galilei**

Discorsi su due nuove scienze .

Analýza šikmého vrhu v gravitačním poli.

Projektíl se pohybuje vertikální rovině. Počáteční rychlost projektilu je: $\vec{v}_0$

Počáteční poloha je $[x_0, y_0]$.

Složky vektoru počáteční rychlosti ve směru os x a y jsou:

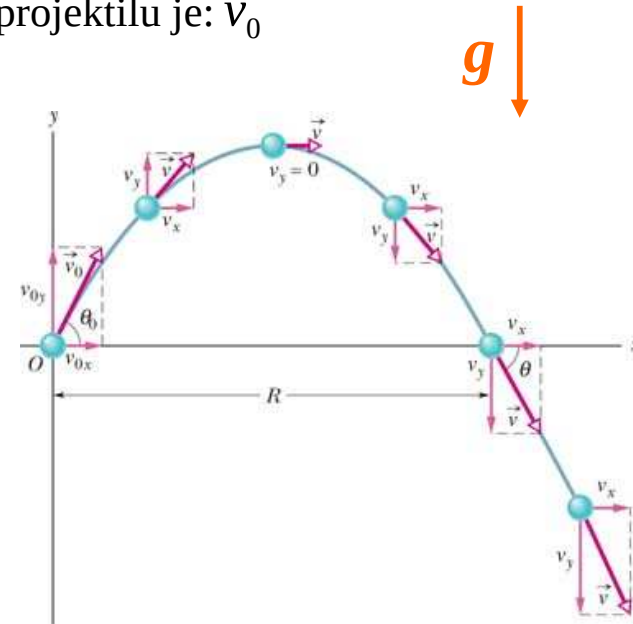
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$$

Složky zrychlení ve směru os x a y :

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$



Pohyb v horizontální rovině

- horizontální složka vektoru rychlosti (ve směru osy x)

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

- závislost dráhy x uražené za čas t je dána vztahem

$$x = x_0 + (v_0 \cos \theta_0)t$$

Pohyb ve vertikálním směru, směr osy y

- ve vertikálním směru se projektil pohybuje volným pádem se zrychlením:

$$a_y = -g$$

Vertikální složka vektoru rychlosti (ve směru osy y):

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

Závislost dráhy y uražené za čas t je dána vztahem:

$$y = y_0 + (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vyloučením parametru t z rovnic pro x a y dostaneme rovnici dráhy pohybu projektilu:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

Rovnice dráhy projektilu má tvar rovnice paraboly:

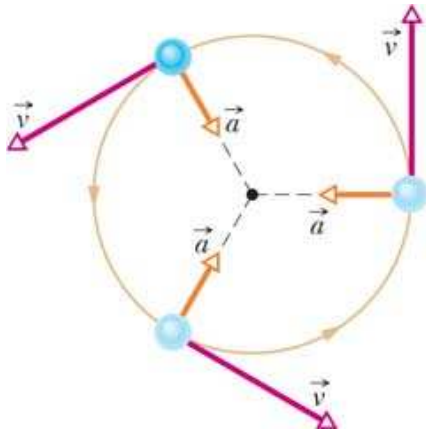
$$y = ax + bx^2$$

a, b - konstanty

$$a = (\tan \theta_0)$$

$$b = \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

Pohyb po kružnici s konstantní velikostí vektoru rychlosti



Vektor rychlosti částice pohybující se rovnoměrně po kružnici míří vždy ve směru tečny ke kružnici.

Rychlost při rovnoměrném pohybu po kružnici se nemění, mění se však směr vektoru rychlosti, to znamená, že pohyb po kružnici je vždy zrychleným pohybem.

Vektor zrychlení míří směrem do středu kružnice, nazýváme ho **dostředivým zrychlením**.

Velikost vektoru zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

v je rychlost kruhového pohybu,
 r je poloměr kružnice

Doba jednoho oběhu kružnice - **perioda**:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$