

A black and white photograph of the Tacoma Narrows Bridge, showing its suspension towers and cables. The bridge deck is visible, and the surrounding landscape includes trees and hills. The image is used as a background for the text.

Tacoma Bridge, 1940

Kmitání-oscilace

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Kmity - oscilace.

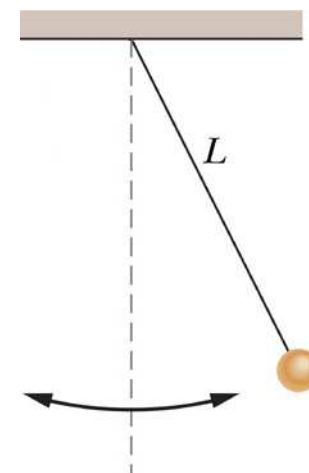
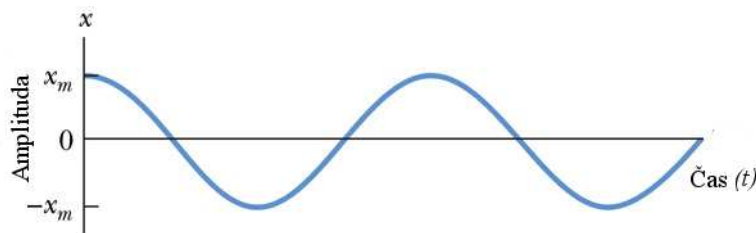
Kmitání - opakující se změna veličiny v čase. okolo rovnovážné polohy. Příkladem kmitů jsou pohyby planet + jakýkoliv pohyb po kruhové dráze, hodinové kyvadlo, chemické oscilace, elektrické kmity, periodické změny tlaku nebo hustoty v kapalině atd.

Z hlediska časového průběhu pohybu hovoříme o kmitech periodických (harmonický a anharmonický) a aperiodických. Z hlediska energie kmitajícího systému o kmitech tlumených a nucených.

Periodické harmonické kmity.

Periodické harmonické kmity jsou kmity kde výchylka je úměrná harmonické funkci času. Harmonická funkce je označení pro goniometrické funkce sinus a cosinus:

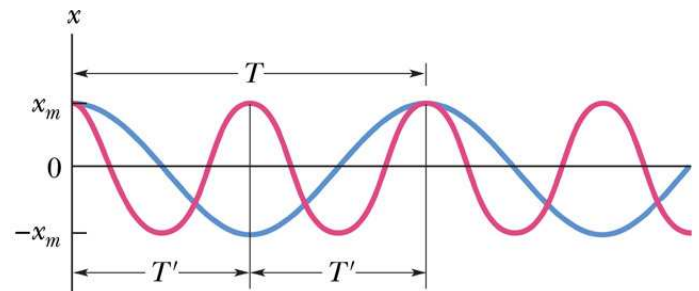
$$x(t) \approx \cos(\omega t + \phi), \quad x(t) \approx \sin(\omega t + \phi)$$



Veličiny charakterizující kmitání.

Perioda kmitání T je doba jednoho celého „oběhu“. Jednotkou periody je 1 sekunda. Počet opakování (period) za jednotku času nazýváme **frekvencí kmitání** f , jednotkou je 1 Hertz. Mezi frekvencí a periodou platí vztah:

$$f = \frac{1}{T}$$



Výchylka hmotného bodu - přemístění - je dána vztahem:

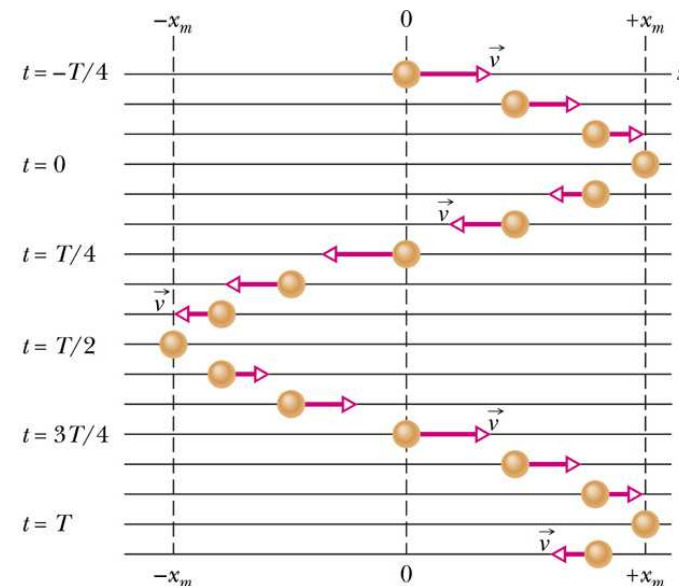
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Maximální výchylku (přemístění) harmonického pohybu x_m označujeme jako **amplitudu**.

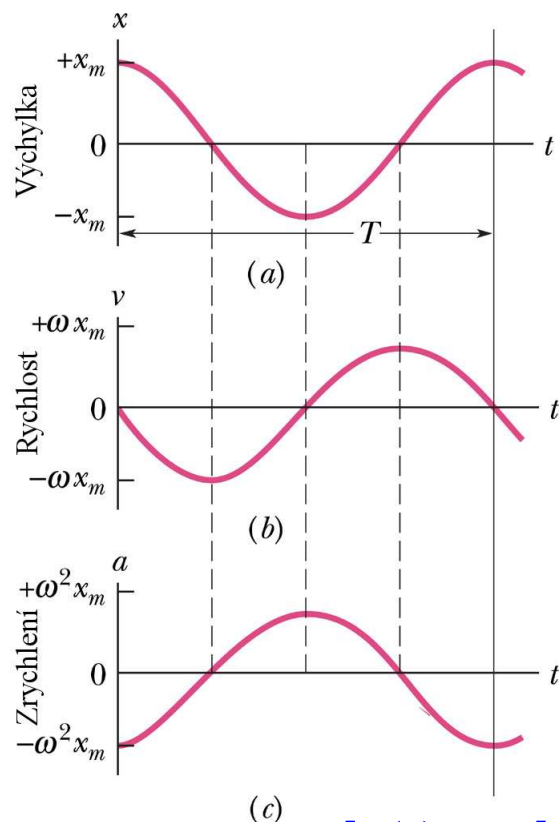
Veličina ω je **úhlová frekvence** harmonického pohybu, je dána rovnicí:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Veličina ϕ je **fázová konstanta** (fáze) kmitu, udává počáteční výchylku, to je $x(t)$ v čase $t = 0$. Její jednotkou je 1 radián.



Rychlost a zrychlení harmonických kmitů.



Velikost rychlosti harmonického pohybu je:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \phi)] = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

Veličina ωx_m je amplituda rychlosti harmonického pohybu. Je to maximální možná hodnota rychlosti harmonického pohybu $v(t)$. Na obrázku (b) je závislost rychlosti harmonického pohybu na čase t pro $\phi = 0$:

$$v(t) = -\omega x_m \sin \omega t$$

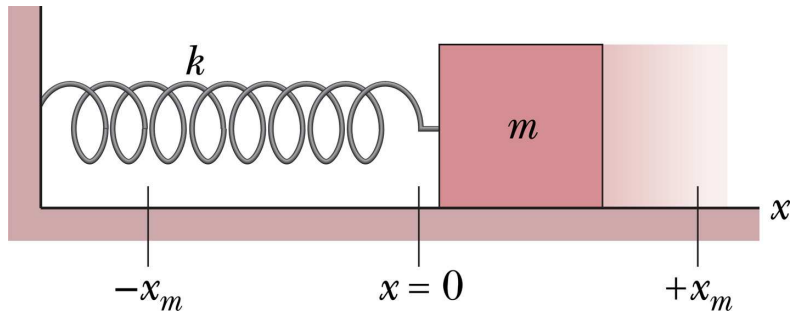
Velikost zrychlení harmonického pohybu je:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)] = -\omega^2 x_m \cos \omega t = -\omega^2 x$$

Veličina $\omega^2 x_m$ je velikost amplitudy zrychlení harmonického pohybu. Je to maximální možná hodnota velikosti zrychlení harmonického pohybu $a(t)$. Na obrázku (c) je závislost zrychlení harmonického pohybu na čase t pro $\phi = 0$:

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$$

Pohybová rovnice jednoduchého harmonického pohybu.



Systém těleso hmotnosti m – pružina, charakterizovaná silovou konstantou k kmitá bez tření mezi míst o souřadnicích $(-x_m)$ a x_m .

Ze zákona síly a Hookova zákona vyplývá:

$$\left. \begin{aligned} F &= ma = -(m\omega^2)x \\ F &= -kx \end{aligned} \right\} \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pro periodu platí:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Energie harmonických kmitů.

Celková mechanická energie harmonického pohybu E je součtem potenciální a kinetické energie E_{pot} a E_{kin} .

Potenciální energie E_{pot} :

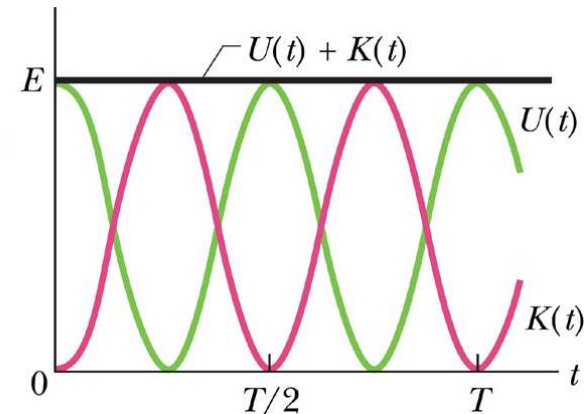
$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Kinetická energie E_{kin} :

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

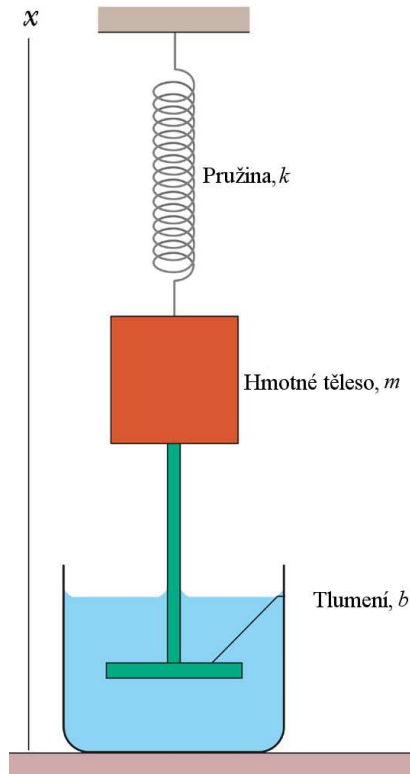
Celková mechanická energie E :

$$E = U + K = \frac{1}{2} kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2} kx_m^2$$



Celková mechanická energie harmonických kmitů je konstantní, potenciální a kinetická energie se však vzájemně „přelévají“.

Tlumené harmonické kmity.



Vnější odporující síla působící na kmitající systém, způsobuje postupné zmenšování amplitudy kmitu, tedy kmit je tlumen. Uvažujme tlumící sílu úměrnou rychlosti pohybu kmitajícího systému:

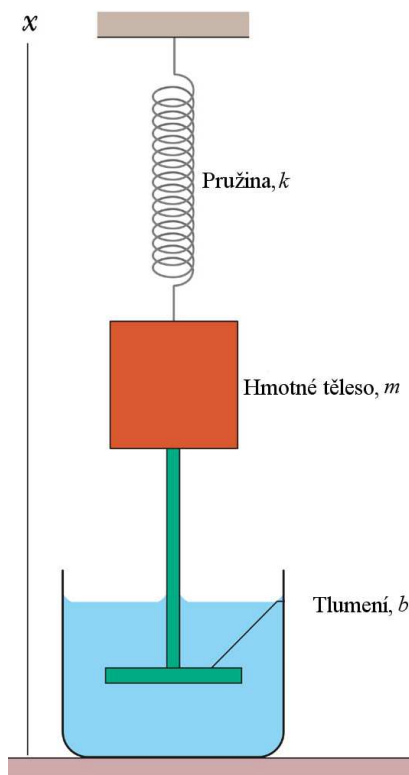
$$F_{\text{tlumení}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

Modelovým příkladem tlumeného kmitajícího mechanického systému je svisle zavěšená pružina konstanty tuhosti k k níž je připevněno těleso hmotnosti m jehož jedna část je ponořena do vany s kapalinou. Kapalina působí brzdicí silou $F_{\text{tlumení}}$ působící proti pohybu tělesa úměrnou rychlosti pohybu ponořené části tělesa v kapalině. Parametr b v rovnici pro sílu tlumení je tlumící konstanta. Výsledná síla působící na těleso je:

$$F_{\text{net}} = -kx - bv$$

Dosazením vztahu pro F_{net} do Newtonova zákona síly dostaneme:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - bv \rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$



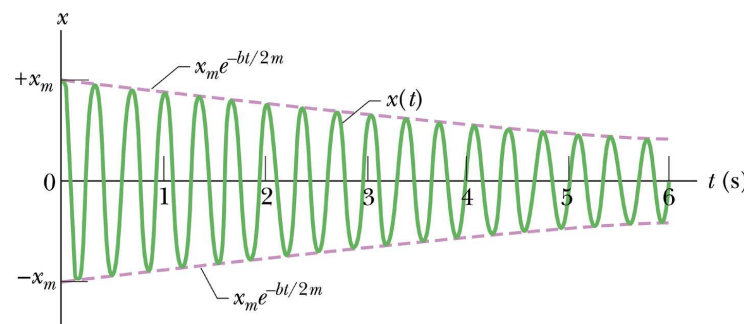
Řešení rovnice vyjadřující Newtonův zákon síly pro tlumený harmonický pohyb

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

je ve tvaru:

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$$

Grafické znázornění řešení rovnice tlumeného harmonického pohybu:



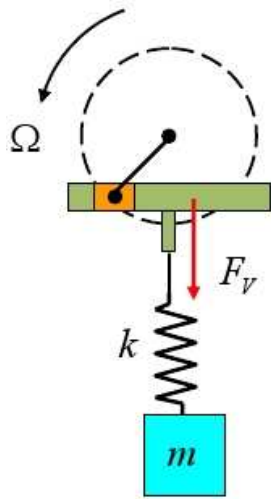
Člen $x_m e^{-bt/2m}$ je amplituda, harmonického pohybu.

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$
 je kruhová frekvence tlumeného

Energie tlumeného harmonického pohybu s rostoucím časem klesá. V případě slabého tlumení můžeme amplitudu x_m nahradit $x_m e^{-bt/2m}$, pro celkovou energii tlumeného harmonického pohybu pak platí:

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$

Nucené harmonické kmity a resonance.



Vynucené harmonickém kmitáním je kmitání, kdy na kmitající systém působí vnější budící síla $F_{bud.}(t)$. Zákon síly má pak tvar:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + F_{bud.}(t)$$

Vnější budící síla může mít různé závislosti na čase. Nejjednodušší budící silou je harmonicky se měnící síla s kruhovou frekvencí Ω :

$$F_{bud.}(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Řešením rovnice pro harmonicky se měnící budící sílu: $y = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t)$

Oscilátor tedy kmitá se stejnou frekvencí jako budící síla, amplituda však závisí na frekvenci budící síly ω a vlastní frekvenci harmonického oscilátoru ω_0 . Pokud by kruhová frekvence budící síly byla rovna vlastní frekvenci oscilátoru pak by amplituda kmitu byla nekonečná. To však není možné, vždy je přítomna nějaká tlumící síla. Tuto tlumící sílu je tedy třeba do rovnice zahrnout:

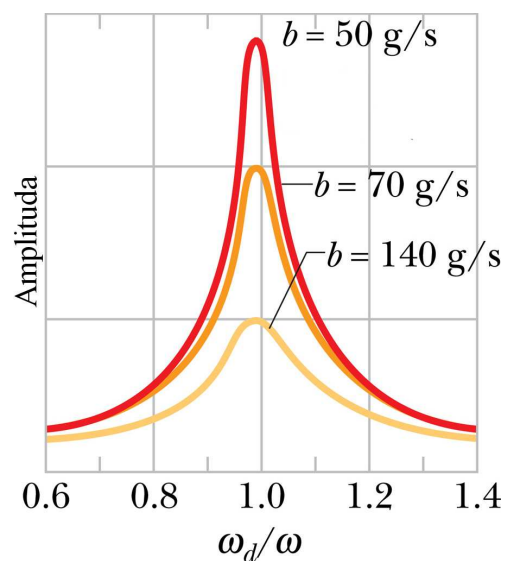
$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - b \frac{dy}{dt} + F_{bud.}(t)$$

Řešení rovnice $m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky + b \frac{dy}{dt} = F_0 \cos(\Omega t)$ je ve tvaru:

$$y = Ae^{-bt} \cos(\omega_0 t + \delta_0) + A_v \sin(\Omega t + \gamma)$$

Řešení je součtem dvou členů. První člen odpovídá tlumenému harmonickému pohybu, druhý je pak příspěvkem budící síly. Amplituda A_v příspěvku budící síly je dána vztahem:

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \frac{F_0}{m}$$



Fáze budící síly je dána vztahem: $\text{tg } \gamma = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Amplituda A_v je závislá na frekvenci budící síly. Maximum amplitudy nastane je-li kruhová frekvence budící síly rovna kruhové frekvenci vlastních kmitů netlumeného harmonického oscilátoru.

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je idealizací reálného kyvadla. Realizací matematického kyvadla je těleso hmotnosti m , zanedbatelného objemu které je zavěšeno na nehmotném lanku délky L , a kýve se bez tření okolo pevného závěsu lanka. Rovina kývání se v čase nemění.

Na hmotný bod působí tahová síla lanka T a gravitační síla F_g . Z rovnice pro moment síly τ působící na hmotný bod na rameni délky L vyplývá:

$$\tau = -L(F_g \sin \theta)$$

Newtonův zákon síly pro rotující těleso: $\tau = I\alpha$

Po dosazení za τ dostaneme vztah: $-L(F_g \sin \theta) = I\alpha$

Předpokládejme, že výchylka je malá ($\sin \alpha \approx \alpha$): $-L(mg \sin \theta) \approx -L(mg\theta) = I\alpha$

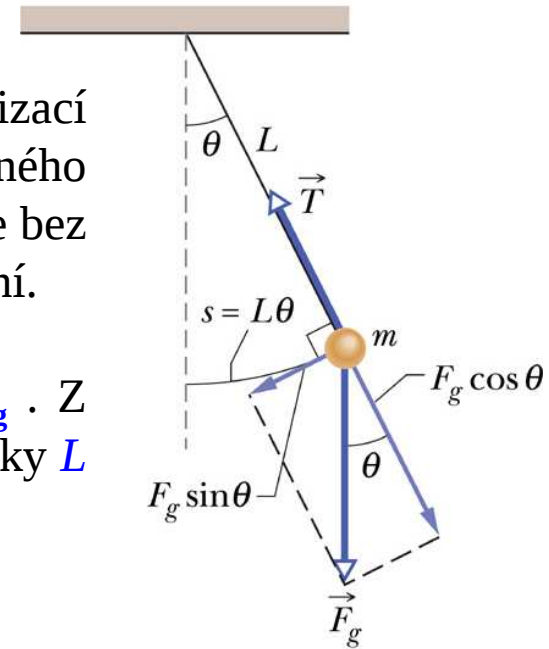
Pro úhlové zrychlení platí:

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta$$

Z porovnání s rovnicí zrychlení jednoduchého harmonického pohybu vyplývá pro kruhovou frekvenci:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$



Perioda kmitů:

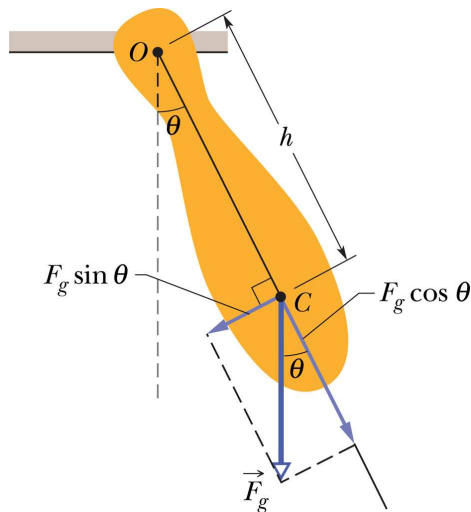
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Veškerá hmotnost matematického kyvadla je soustředěna v hmotné částici na konci závěsu délky L . Moment setrvačnosti kyvadla je:

$$I = mL^2$$

Perioda kmitů matematického kyvadla je pak dána vztahem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Fyzikální kyvadlo

Rozložení hmotnosti v reálném kyvadle (fyzikálním kyvadle) je obvykle složitější a kyvadlo nemusí konat jednoduchý harmonický pohyb. Gravitační síla působí na hmotný střed C tělesa, který leží ve vzdálenosti h od závěsu O okolo které se kyvadlo otáčí. Pro malé výchylky θ reálného kyvadla z rovnovážné polohy jehož moment setrvačnosti je I platí pro periodu vztah:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Fyzikální kyvadlo - měření gravitačního zrychlení.

Ze vztahu pro periodu kmitů fyzikálního kyvadla vyplývá možnost určení hodnoty velikosti gravitačního zrychlení g v daném místě zemského povrchu.

Steinerova věta.

Platí, je-li znám moment setrvačnosti tělesa hmotnosti m vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm I_{com} , pak moment setrvačnosti I téhož tělesa vůči ose otáčení procházející tělesem která je rovnoběžná s původní osou otáčení a leží ve vzdálenosti h od původní osy dán vztahem:

$$I = I_{com} + mh^2$$

Vezmeme kyvadlo tvaru homogenní tyče délky L , otáčející se okolo osy procházející jedním z konců tyče. Hmotný střed tyče leží v polovičce délky tyče. Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející kolmo k tyči jejím hmotným středem je roven $I = \frac{1}{12}mL^2$

Ze Steinerovy věty vyplývá pro tyč otáčející se okolo závěsu procházejícím koncem tyče vztah:

$$I = I_{com} + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Po dosazení za I a $h = L/2$ do vztahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ pak pro gravitační zrychlení platí:

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$