



# Elektro-magnetická indukce.

**Přednášející:**

**RNDr. František Adamec, CSc.**

**Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích**

**Na základě učebnic:**

**Halliday, Resnick**

**Fundamentals of Physics 8<sup>th</sup> Edition, Wiley 2005**

**Feynman, Leighton, Snads**

**Feynmanovy přednášky z fyziky**

**Fragment 2000**

## Elektromagnetická indukce. Objeveno 1831.



**Michael Faraday**

22. 7. 1791 Newington Butts, England

25. 8. 1867 Hampton Court, England

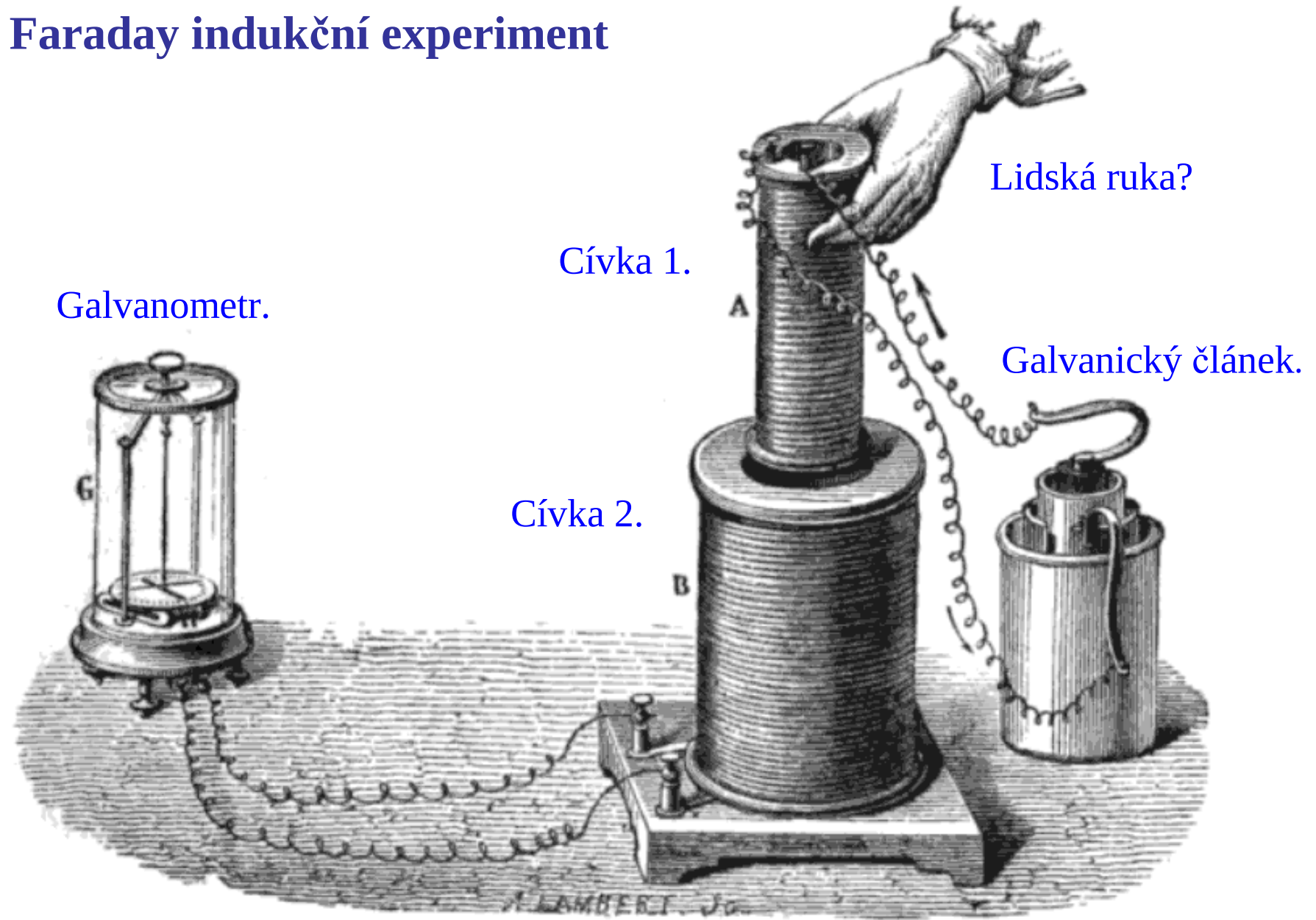


**Joseph Henry**

17.12. 1797 New York, USA

13.5. 1878 Washington, D. C., USA

# Faraday indukční experiment

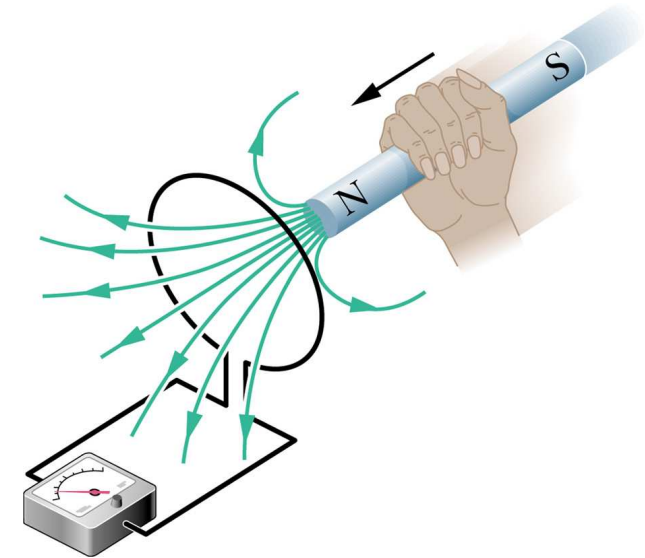


# Elektro-magnetická indukce.

## Pokus I.

Experimentální zařízení sestává z pevného tyčového magnetu, vodivé smyčky a ampérmetru zapojeného mezi oba konce smyčky.

1. Je-li soustava magnet vodivá smyčka vzájemně v klidu, neprotéká smyčkou žádný elektrický proud.
2. Proud protéká vodičem pouze když se magnet a cívka vzhledem k sobě pohybují.
3. Vyšší relativní rychlost pohybu vede k většímu proudu.
4. Změna orientace magnetu vede ke změně směru protékajícího proudu.

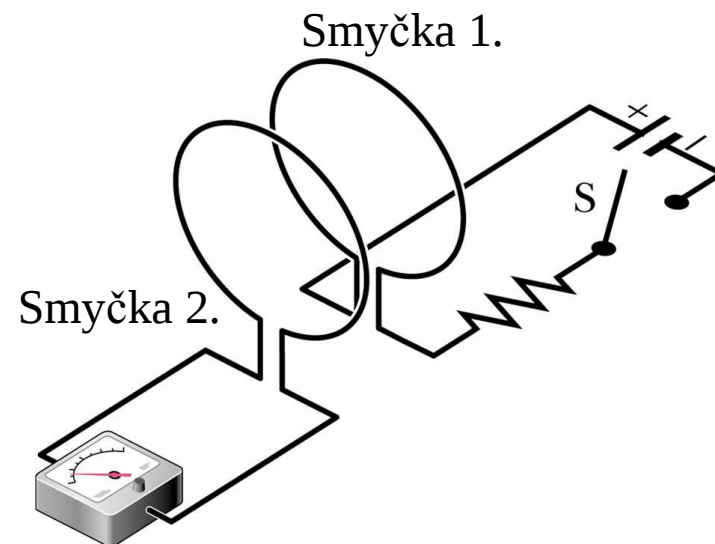


Z experimentu vyplývá, že změna magnetického pole v okolí vodivé smyčky vede ke vzniku elektrického proudu smyčkou.

Proud ve vodiči vyvolaný vzájemným pohybem magnetu a cívky nazýváme **indukovaný elektrický proud** , elektrické napětí nazýváme **indukované elektromotorické napětí**.

## Pokus II.

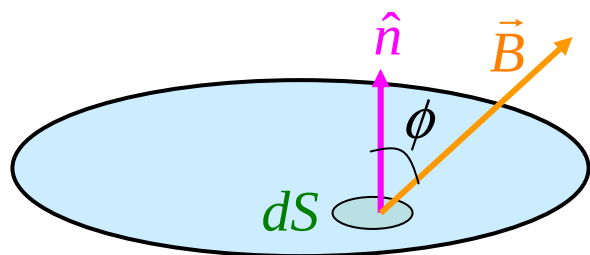
Změníme-li experimentální zařízení tak, že namísto pevného magnetu použijeme vodivou smyčku, kterou necháme protékat elektrický proudem a tuto smyčku umístíme v rovině rovnoběžné s rovinou druhé smyčky, pak dostaneme stejné výsledky jako v prvním experimentu. Směr elektrického proudu v druhé smyčce závisí na směru elektrického proudu smyčkou, která je zdrojem magnetického pole. Elektrický proud se indukuje pouze v okamžiku zapnutí a vypnutí elektrického proudu.



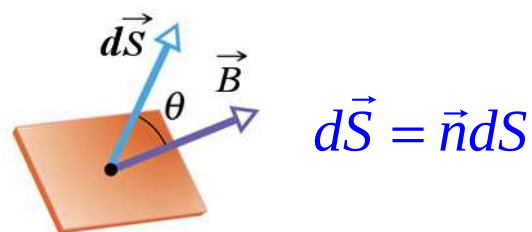
# Faradayův zákon elektromagnetické indukce.

Z Faradayových experimentů vyplývá, že elektromotorické napětí se indukuje pouze při změnách toku vektoru magnetického indukce pole  $\vec{B}$  uzavřenou plochou  $S$  obepnutou vodivou smyčkou.

## Magnetický tok plochou ohraničenou uzavřenou křivkou.



1. Plochu  $S$  rozdělíme na elementární plošky  $dS$ .
2. Pro každý element plochy spočítáme elementární magnetický tok touto ploškou  $d\Phi_B = B dS \cos \phi$ . Úhel  $\phi$  je úhel mezi směrem vektoru magnetické indukce  $\vec{B}$  a normálovým vektorem  $\vec{n}$  k elementu plošky  $dS$ .
3. Spočteme integrál příspěvků od všech elementů  $d\Phi_B$  přes celou uzavřenou plochu  $S$ :



$$\Phi_B = \int_S B dS \cos \phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

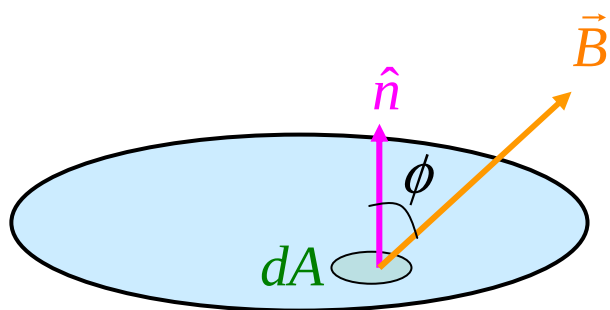
Jednotkou magnetického toku je 1 Weber,  $1 \text{ Wb} = 1 \text{ Tm}^2$ . Velikost indukovaného elektromotorického pole je dána Faradayovým zákonem:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Faradayův zákon pro cívku s  $N$  závitů:

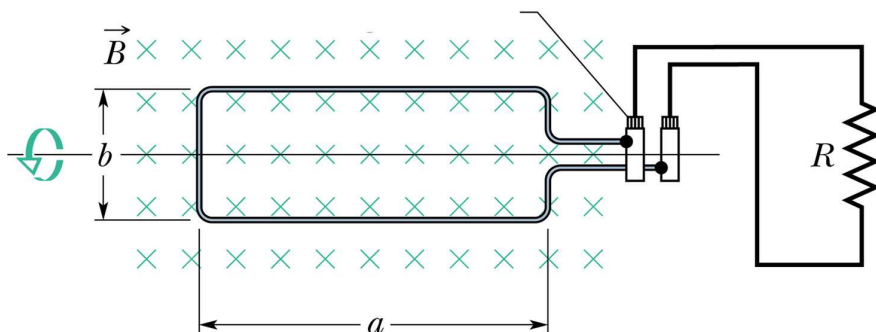
$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

# Faradayův zákon elektromagnetické indukce.



Tok magnetického pole plochou uzavřené vodivé smyčky lze změnit:

1. Změnou velikosti magnetické indukce pole  $B$ .
2. Změnit celkovou plochu smyčky.
3. Změnit aktivní plochu smyčky jejím otočením vzhledem k orientaci vektoru magnetické indukce.

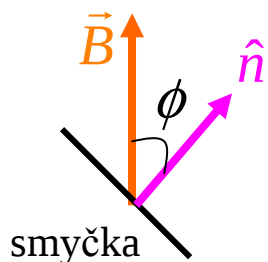


$$\Phi_B = NAB \cos \phi = NabB \cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega NabB \sin(\omega t)$$

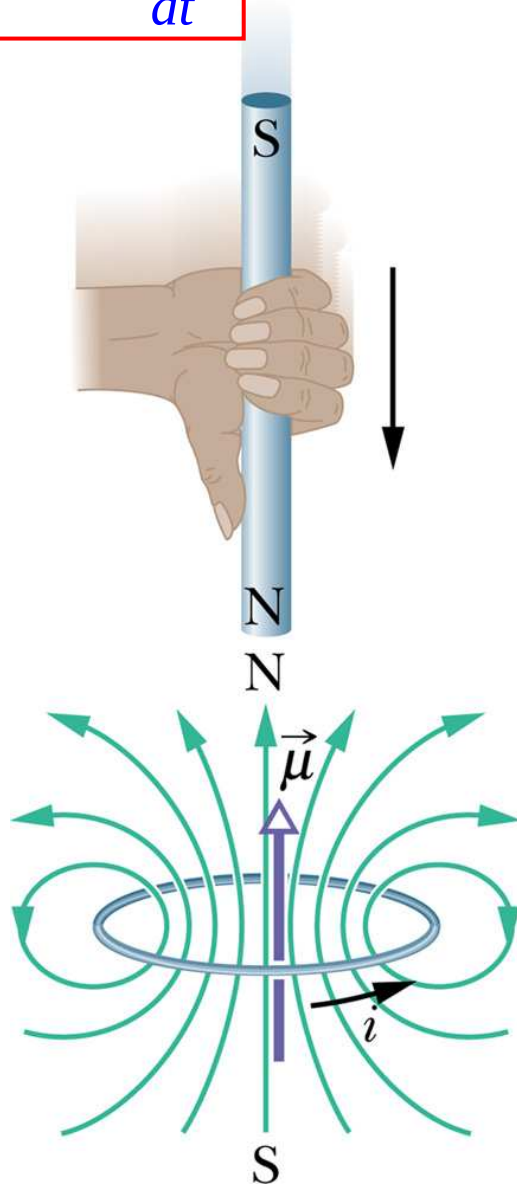
$$\omega = 2\pi f \rightarrow$$

$$\mathcal{E} = 2\pi f NabB \sin(2\pi t)$$



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

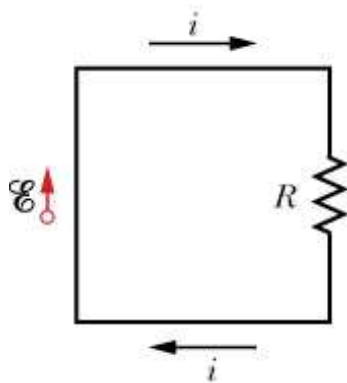
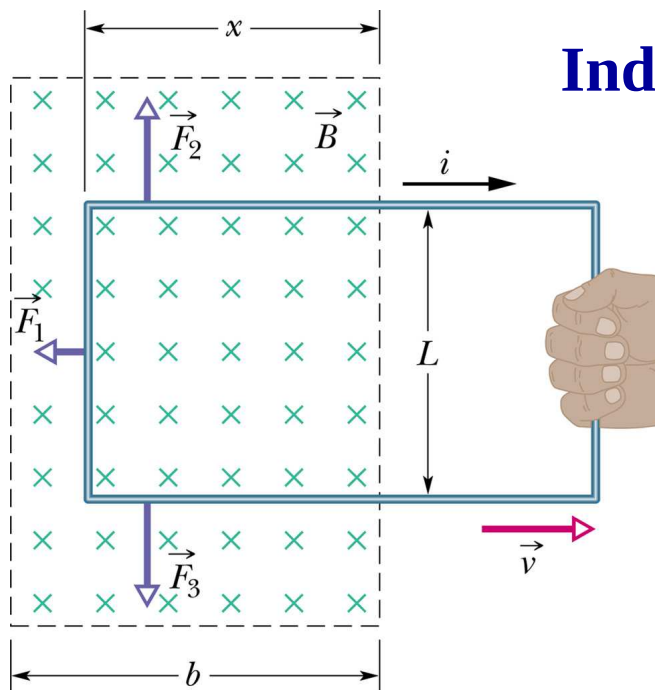
## Lenzovo pravidlo.



Pohyb permanentního magnetu severním pólem směrem do vnitř vodivé smyčky vyvolá změnu toku magnetického pole smyčkou a následně vznik indukovaného elektrického proudu. Vodivá smyčka jíž protéká indukovaný elektrický proud se chová jako magnetický dipól jehož severní pól je orientován proti severnímu pólu permanentního magnetu. Permanentní magnet je tedy vytlačován ve směru od vodivé smyčky. Pohyb magnetu v opačném směru vede k obrácení směru pohybu elektrického proudu smyčkou a tak k otočení smyslu vektoru magnetické indukce.

Indukovaný elektrický proud má takovou orientaci, aby magnetické pole tohoto indukovaného proudu působilo proti změně, která vznik indukovaného proudu vyvolala.

## Indukce a přenos energie.



Vodivá uzavřená smyčka obdelníkového tvaru jejíž rovina je kolmá ke směru vektoru **B** je vytahována konstantní rychlostí **v** ven s prostoru homogenního magnetického pole. Na pohybující se smyčku působí síly, které jí brání v pohybu ven ze smyčky. Tedy k tomu, abychom smyčku vytáhli určitou rychlostí je třeba vynaložit po dobu pohybu smyčky práci, určitý výkon  $P = Fv$ .

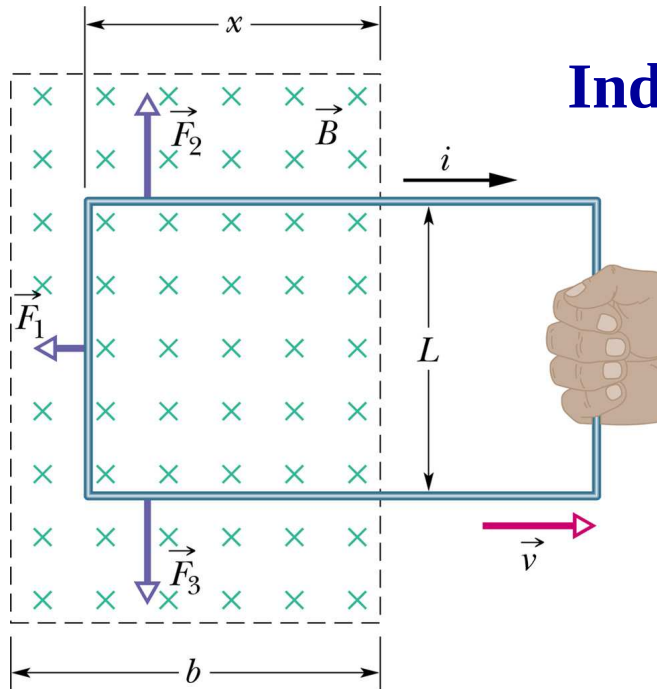
Vynaložená vnější energie je disipována na odporu **R** pohybující se vodivé smyčce ve formě tepelné energie. Magnetický tok smyčkou je:

$$\Phi_B = BA = BLx$$

Z Faradayova indukčního zákona vyplývá pro elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$ :

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = BL \frac{dx}{dt} = BLv \quad i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

## Indukce a přenos energie.



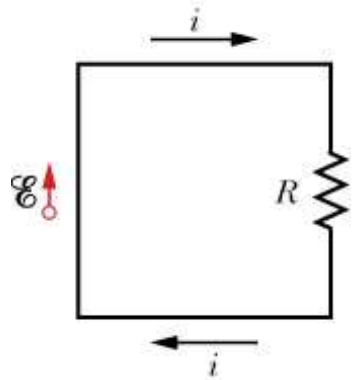
Rychlost disipace energie ve vodivé smyčce na teplo je dána:

$$P_Q = i^2 R = \left( \frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (1)$$

Na vodivou smyčku působí v magnetické poli indukce  $B$  a síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$ , síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$  se vykompenzují, síla  $\mathbf{F}_3$  je rovna

$$\vec{F}_1 = i\vec{L} \times \vec{B}, \quad F_1 = iLB \sin 90^\circ = iLB = \frac{BLv}{R} LB,$$

$$F_1 = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

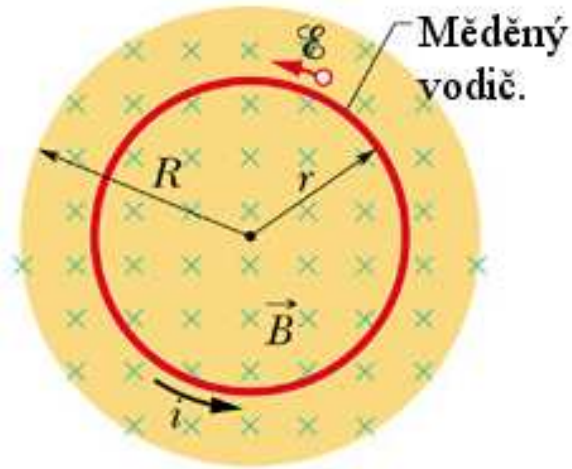


Výkon vnější síly vytahující smyčku tedy je roven:

$$P_{\text{ext}} = F_1 v = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (2)$$

Z rovnosti vztahů (1) a (2), že práce, kterou vykonáme při vytahování smyčky z homogenního magnetického pole intensity  $B$  se promění na teplo.

## Indukované elektrické pole.

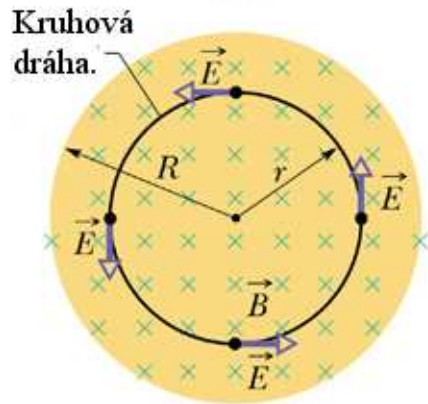


Ve vodivé smyčce, na obrázku reprezentovanou kruhovou měděnou smyčkou, do magnetické pole o magnetické indukci  $\mathbf{B}$  se indukuje elektrický proud  $\mathbf{i}$ . Elektrický proud je tokem elektronů vodičem mezi místy o různém elektrickém potenciálu. To znamená, že vyvolání indukovaného elektrického proudu změnou toku magnetické indukce plochou obepínanou vodivou smyčkou musí nutně vyvolat vznik elektrického pole ve vodiči.

**Změna magnetického pole vyvolá indukovaný elektrický proud a tedy elektrické pole.**

**Důležitá poznámka:**

Elektrické pole je indukováno při změnách magnetického pole i bez přítomnosti vodivého prostředí.



Práce vykonaná indukovaným elektrickým polem při přemístění náboje  $q_0$  po kruhové dráze je dána vztahem:

$$W = q_0 \mathcal{E} \quad (1)$$

Kde  $\mathcal{E}$  je indukované elektromotorické napětí (síla).

Z definice práce vyplývá pro práci vykonanou při přenesení náboje  $q_0$  v poli o elektrické intenzitě  $E$  po kruhové dráze vztah:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0 E)(2\pi r) \quad (2)$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme pro vztah indukované elektromotorické síly a intenzitou indukovaného pole vztah:

$$\mathcal{E} = 2\pi r E$$

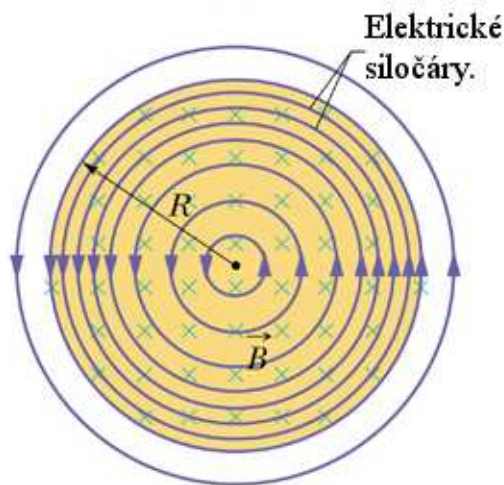
Zobecnění pro libovolnou dráhu:  $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Srovnáním se vztahem (1) pak dostaneme pro  $\mathcal{E}$  vztah:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

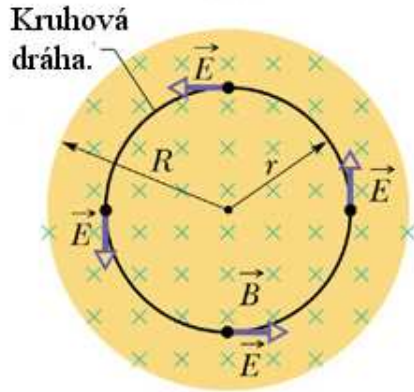
Dosazením do Faradayova zákona pak dostaneme

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



## Příklad.

Najděte vztah pro velikost intensity indukovaného elektrického pole kruhového tvaru v bodě vzdáleném  $r$  od středu. Poloměr oblasti magnetického pole je  $R$ .

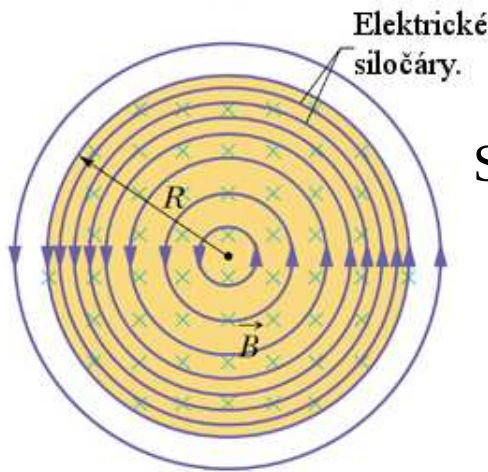


Elektromotorická síla podél zvolené integrační dráhy:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

Z Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (2)$$



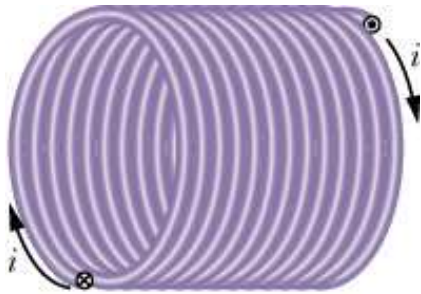
Srovnáním (1) a (2) dostaneme:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E ds \cos 0 = E \oint ds = 2\pi r E$$

$$\Phi_B = \pi r^2 B \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

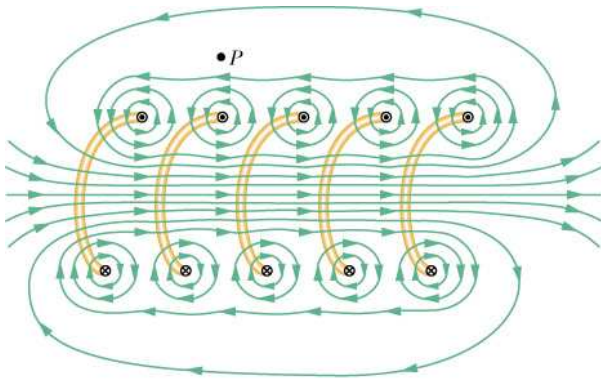
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\rightarrow 2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \rightarrow E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

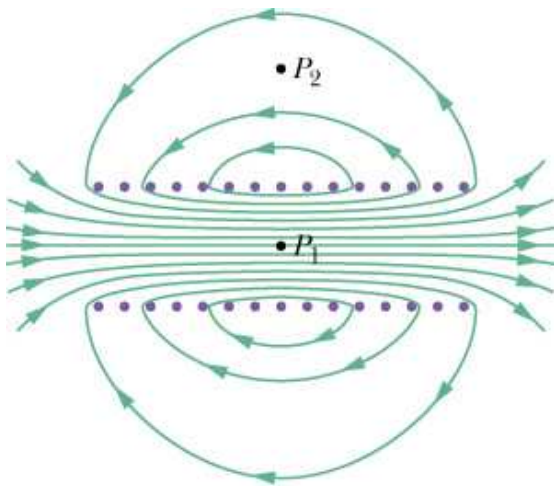


## Magnetické pole solenoidu.

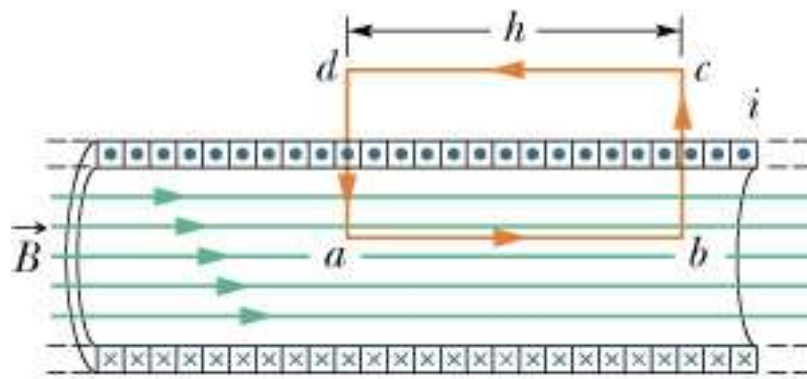
Svinutím vodiče do tvaru spirály o daném průměru, tak, že jednotlivé závity vinutí k sobě těsně přiléhají získáme cívku, kterou nazýváme **solenoid**. Délka solenoidu je delší než jeho průměr.



Jednotlivé závity solenoidu vytvářejí ve svém okolí vlastní magnetické pole. Tato pole se sčítají, tak, že v blízkosti osy solenoidu míří siločáry celkového magnetického pole podél osy solenoidu.



Magnetické pole solenoidu konečné délky je homogenní a silné uvnitř solenoidu (bod  $P_1$ ). Naopak vně solenoidu (bod  $P_2$ ) je magnetické pole nehomogenní a výrazně slabší. Orientace vektoru magnetické indukce je opět dána pravidlem pravé ruky.



Pole ideálního solenoidu, to znamená, magnetická indukce pole vně solenoidu je nulová, uvnitř solenoidu je magnetické pole homogenní.

Zvolme integrační dráhu ve tvaru obdelníku, tak jak je nakreslena na obrázku. Pak lze výpočet integrálu po obdelníkové dráze rozdělit na součet integrálů podél jednotlivých stran:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b B ds \cos 0 = B \int_a^b ds = Bh \\ \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bh$$

Celkový elektrický proud uvnitř integrační dráhy:  $i_{\text{enc}} = n h i$

$n$  je počet závitů na připadajících na jednotku délky solenoidu. Pak z Ampérova zákona dostaneme pro velikost magnetické indukce uvnitř solenoidu:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}} \rightarrow Bh = \mu_0 n h i \rightarrow \boxed{B = \mu_0 n i}$$

## Indukčnost.

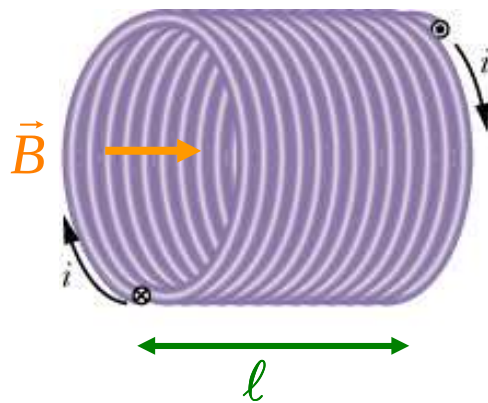
Tok magnetického  $\Phi$  vytvořeného elektrickým proudem  $i$  protékajícím vodivou smyčkou je přímo úměrný tomuto proudu. Konstantou úměrnosti je **indukčnost  $L$** .

$$\Phi_B = Li$$

Tok magnetického  $\Phi$  je pak úměrný součinu počtu smyček  $N$  (závitů) tvořících cívku, indukčnosti  $L$  a protékajícímu proudu  $i$ .

$$\Phi_B = LNi$$

Fyzikální jednotkou indukčnosti  $L$  je **1 Henry = 1H = 1Tm<sup>2</sup>A<sup>-1</sup>**.

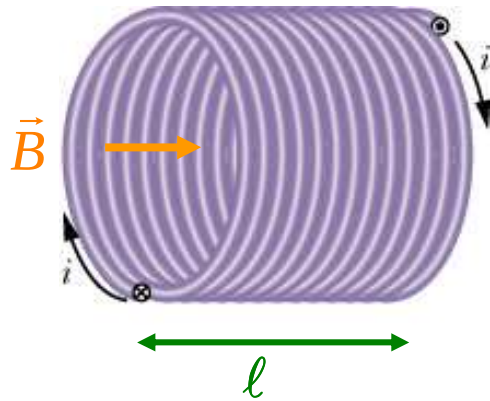


### Indukčnost solenoidu.

Máme dlouhý solenoid, délky  $l$ , který je tvořen  $N$  smyčkami, průřezu  $A$ . Jaká je jeho indukčnost připadající na jednotku délky?

Počet závitů připadajících na jednotku délky je  $n = N/l$ .

$$L = \mu_0 n^2 \ell A$$



Elektrický proud  $i$  protékající solenoidem vyvolá uvnitř solenoidu homogenní magnetické pole o indukci  $B$ :

$$B = \mu_0 n i$$

Magnetický indukční tok solenoidem:  $\Phi_B = NBA$

$$L = \mu_0 n^2 \ell A$$

Počet závitů solenoidu  $N = n\ell$ , potom pro magnetický indukční tok uvnitř solenoidu:

$$N = n\ell \rightarrow \Phi_B = (\mu_0 n^2 \ell A) i$$

Pro indukčnost solenoidu pak platí vztah:

$$L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 \ell A i}{i} = \mu_0 n^2 \ell A$$

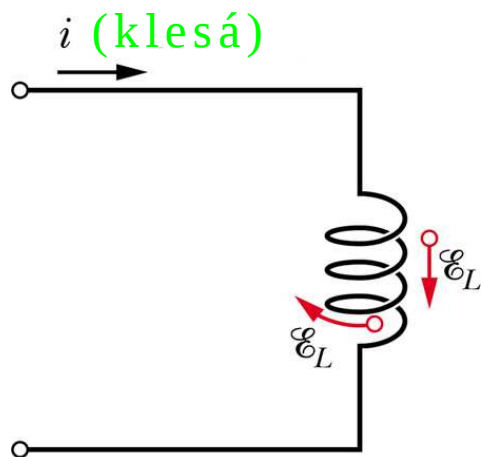
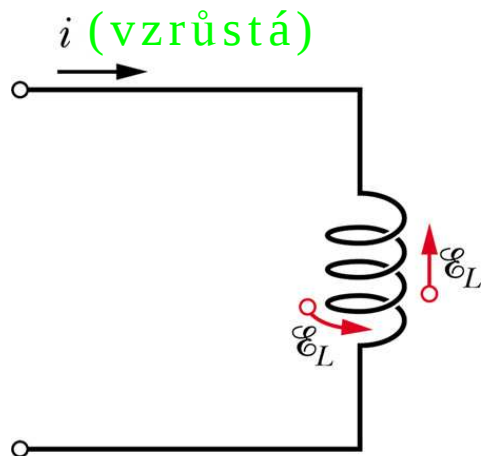
Indukčnost solenoidu na jednotku délky solenoidu:

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A$$

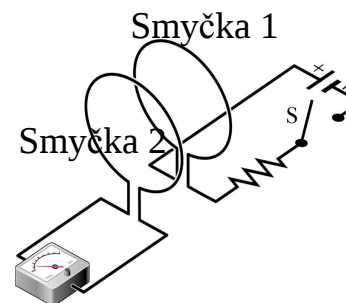
Indukčnost solenoidu je funkcí pouze geometrických vlastností cívky.

## Vlastní indukčnost.

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$



Magnetické pole cívky vyvolané průchodem elektrického proudu cívkou působí na nosiče elektrického proudu v cívce samotné. Proto změna elektrického proudu protékajícího cívkou vyvolá vznik **indukovaného elektromotorického napětí (emf)**, které působí proti změně, která jeho vznik vyvolala.



Jelikož mezi tokem magnetické indukce plochou cívky a proudem protékajícím cívkou platí vztah:  $N\Phi_B = Li$

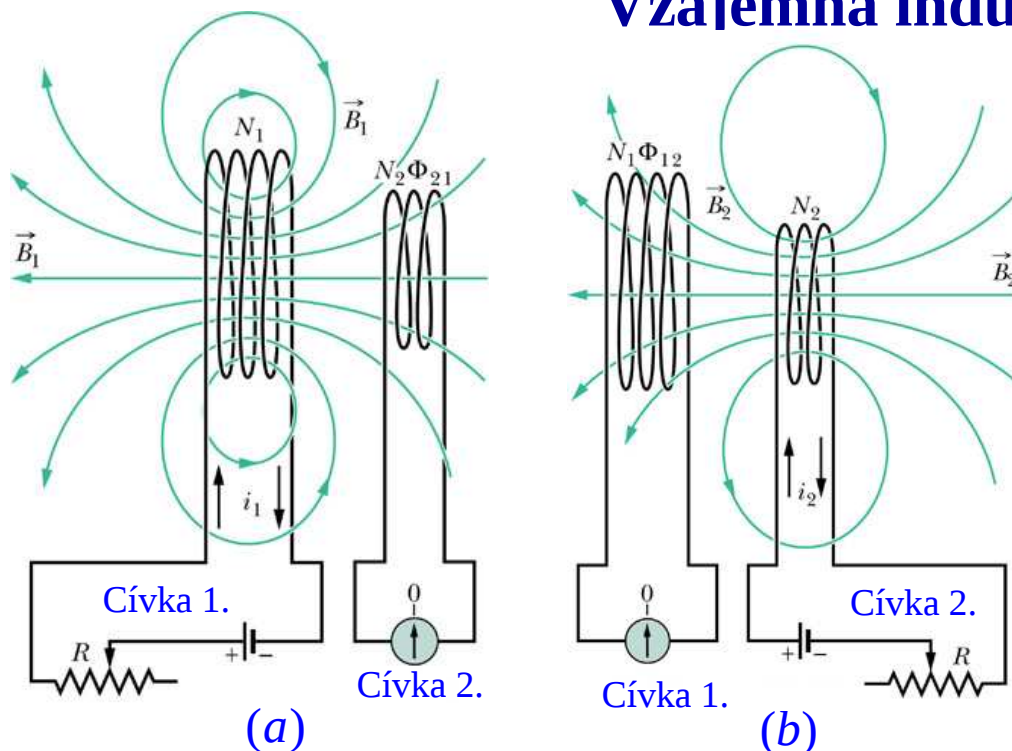
Pak dosazením do zákona elektromagnetické indukce

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

Dostaneme vztah pro **vlastní emf** indukované v cívce a změnou elektrického proudu  $i$ , protékaného cívkou:.

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$$

## Vzájemná indukčnost.



Máme soustavu dvou vzájemně oddělených cívek, ležících blízko sebe. Cívky jsou vzdáleny tak, aby vždy ležely v magnetickém poli vytvářená elektrickým proudem procházejícím buď cívkou 1 nebo cívkou 2.

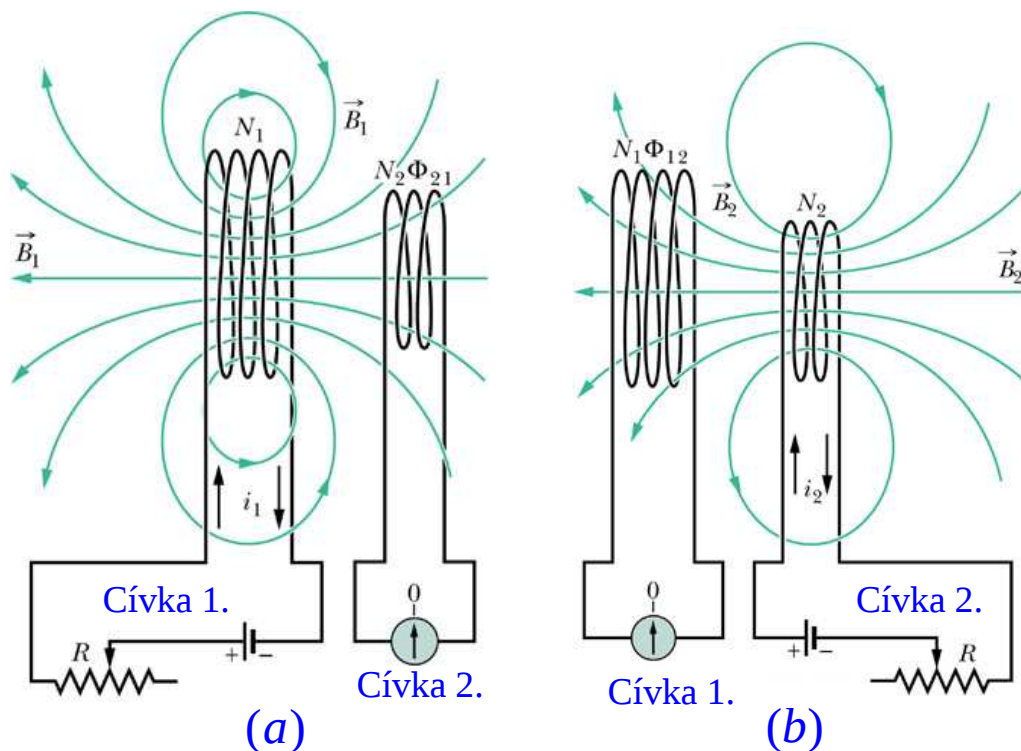
Proud  $i_1$  procházející **cívkou 1** (obr. a) indukuje magnetické pole indukce  $B_1$ , které prochází **cívkou 2** a indukuje v ni elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_2$ . Plochou cívky 2 protéká magnetický tok

$$\Phi_2 = M_{21} i_1$$

Mění-li se proud  $i_1$ , pak se mění také tok magnetické indukce plochou **cívky 2** a tedy podle Faradayova zákon elmag. indukce vzniká v **cívce 2** indukované elektromotorické napětí:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$



Opačná situace, kdy zdrojem magnetického pole je **cívka 2** (obrázek b), dává vztah:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Kde  $\Phi_2$  je tok magnetické pole indukce  $B_2$  plochou **cívky 1**:

$$\Phi_1 = M_{12} i_2$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Je možné ukázat, že **induktance**  $M_{21}$  a  $M_{12}$  jsou si rovny,  $M_{21} = M_{12} = M$ , nazýváme je **konstantami vzájemné indukčnosti**. Jsou funkcí pouze geometrického uspořádání soustavy cívek. Fyzikální jednotkou SI je **1 Henry**. Výsledné rovnice pak zapíšeme ve tvaru:

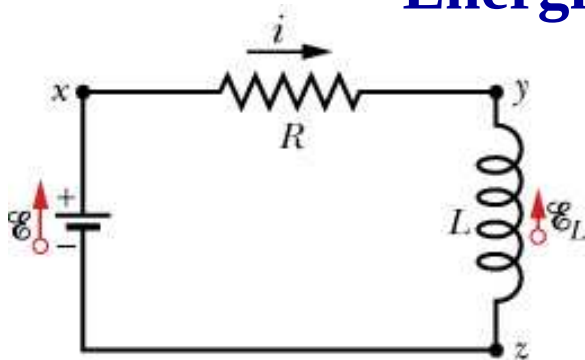
$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$\Phi_1 = M i_2$$

$$\Phi_2 = M i_1$$

## Energie uložená v magnetickém poli.



Elektrický obvod sestává ze zdroje emf.  $\mathcal{E}$ , elektrického odporu  $R$  a cívky o indukčnosti  $L$ . Pro rozdělení energie zdroje emf platí (zákon zachování energie) rovnice:

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + iR \quad (1)$$

Vynásobením rovnice (1) proudem  $i$  získáme rovnici:

$$\mathcal{E}i = Li \frac{di}{dt} + i^2 R \quad (2)$$

Význam jednotlivých členů rovnice (2):

1.  $i$  rychlost s níž zdroj emf. dodává energii do obvodu.
2.  $R i^2$  rychlost s níž se na odporu  $R$  energie přeměňuje na teplo.
3. Z rovnice (2) a významu předešlých členů vyplývá, že člen  $Li \frac{di}{dt}$  má význam rychlosti s níž se energie „ukládá do magnetického pole“. Označme  $U_B$  magnetickou potenciální energii, potom pro změnu  $U_B$  platí:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} \rightarrow dU_B = Lidi$$

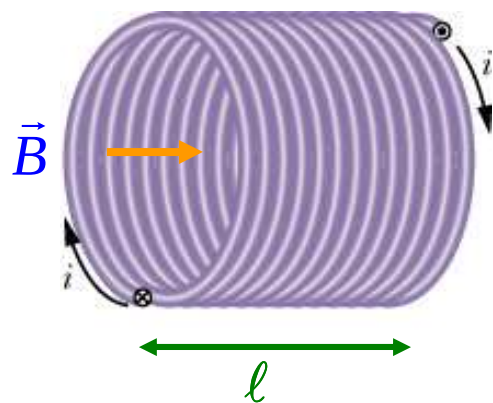
Integrací podle  $di$  dostaneme:

$$U_B = \int_0^i Li' di' = \frac{L[i'^2]_0^i}{2} = \frac{Li^2}{2}$$

$$U_B = \frac{Li^2}{2}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

## Hustota energie magnetického pole.



Solenoid délky  $\ell$ , průřez solenoidu je  $A$ , počet závitů připadajících na jednotku délky je  $n$ .

Elektrický proud  $i$  protékající solenoidem generuje uvnitř solenoidu homogenní magnetické pole  $B = \mu_0 n i$ , magnetické pole vně solenoidu je téměř nulové.

Energie  $U_B$  magnetického pole solenoidu:  $U_B = \frac{Li^2}{2}$

Vnitřek solenoidu zaujímá objem:  $V = Al$

Energie  $U_B$  připadající na jednotkový objem  $u_B$ :  $u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{U_B}{Al} = \frac{Li^2}{2Al} = \frac{L}{l} \frac{i^2}{2A}$

Ze vztahu pro indukčnost solenoidu jednotkové délky, vztahu pro magnetické pole solenoidu a rovnice (1) dostaneme vztah pro hustotu energie magnetického pole solenoidu:

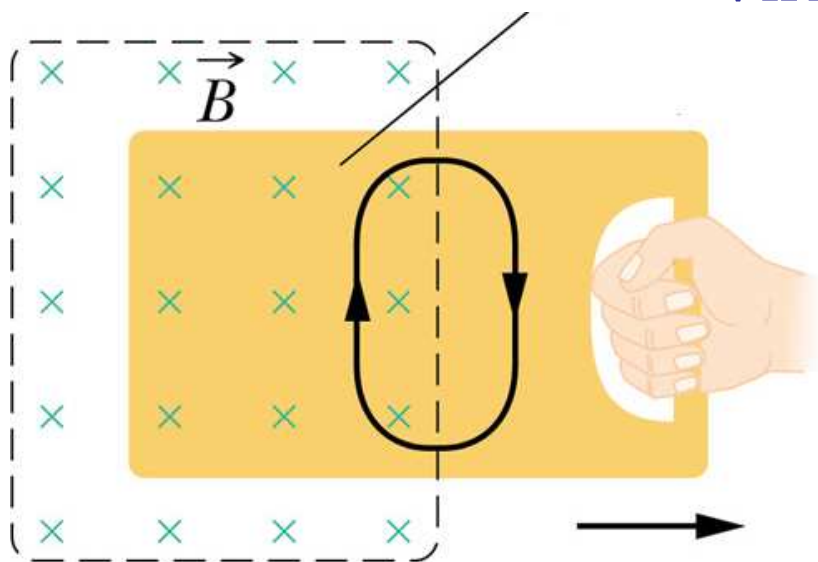
$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A$$

Poznámka: Tato rovnice platí obecně!

$$B = \mu_0 n i$$

## Vířivé proudy.



Vířivé proudy jsou elektrické proudy vznikající v plošných a objemových vodičích umístěných v prostoru proměnného magnetického pole. V takových vodičích se v důsledku změny magnetického indukční tok indukuje emf a elektrický proud. Indukované proudy mají v takových případech charakter proudových smyček. Energie vířivých elektrických proudů se následně přemění na teplo.