

....and God said:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \sum q$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

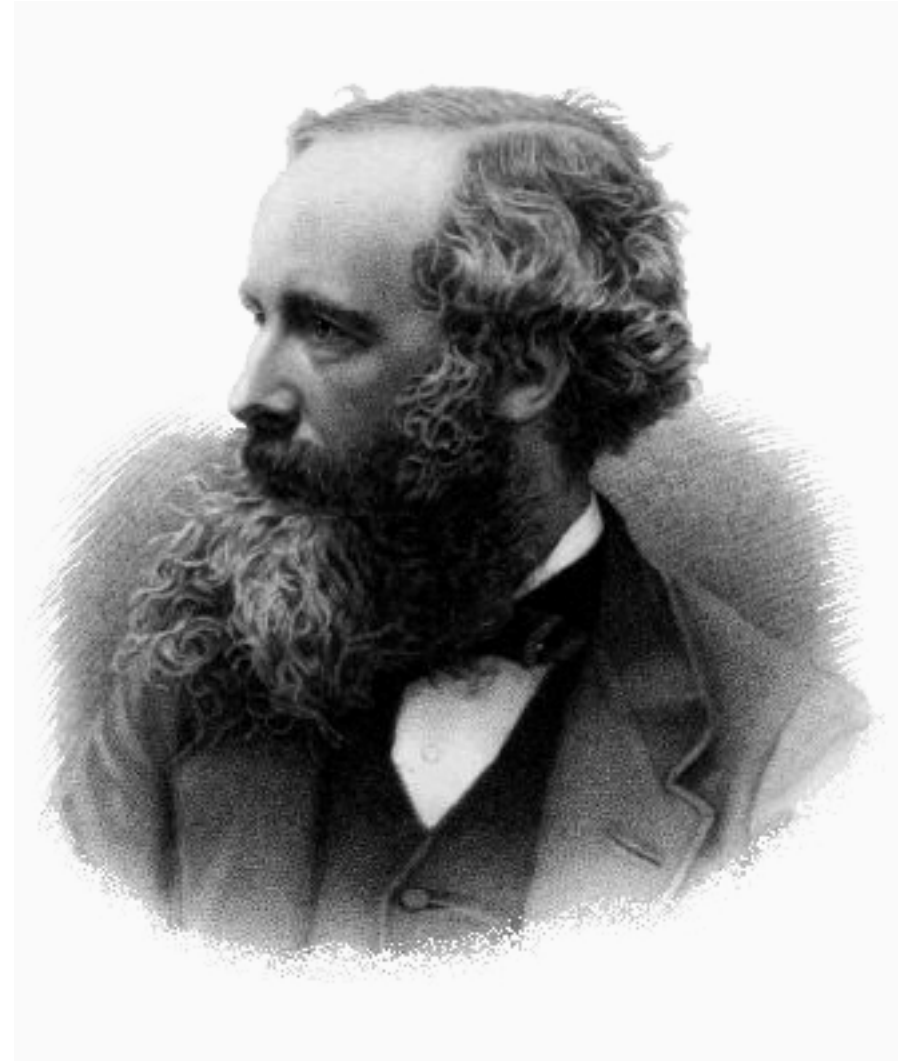
Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

....and there was light!



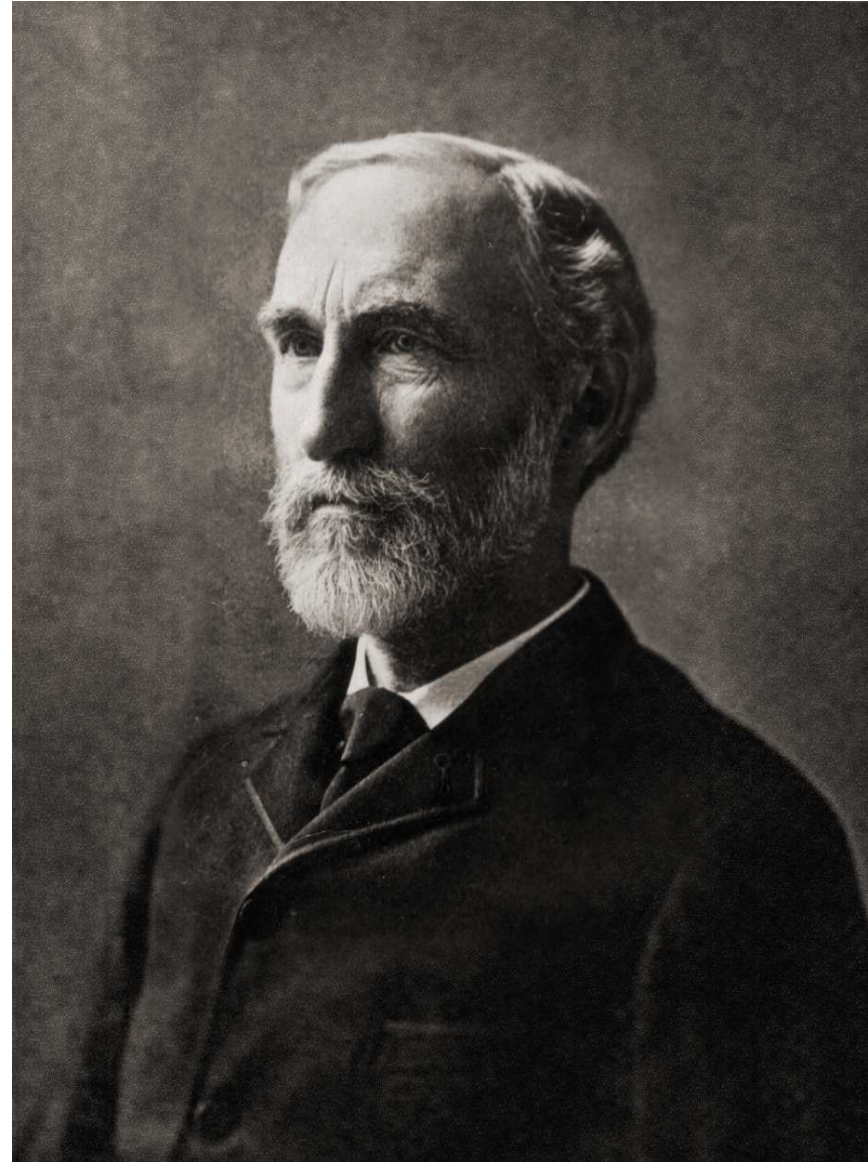
Oliver Heaviside (18. 5. 1850 Camden Town, London, England - 3. 2. 1925 Torquay, Devon, England)



James Clerk Maxwell (13. 6. 1831 Edinburgh, Scotland – 5. 11. 1879 Cambridge, England)



Heinrich Rudolf Hertz (22.2. 1857
Hamburg – 1.1. 1894, Bonn, Germany)



Josiah Willard Gibbs (11.2. 1839 New
Haven, Connecticut–28.4.1903 New
Haven, Connecticut)

Maxwellovy rovnice.

Diferenciální tvar.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Integrální tvar.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{celkový}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

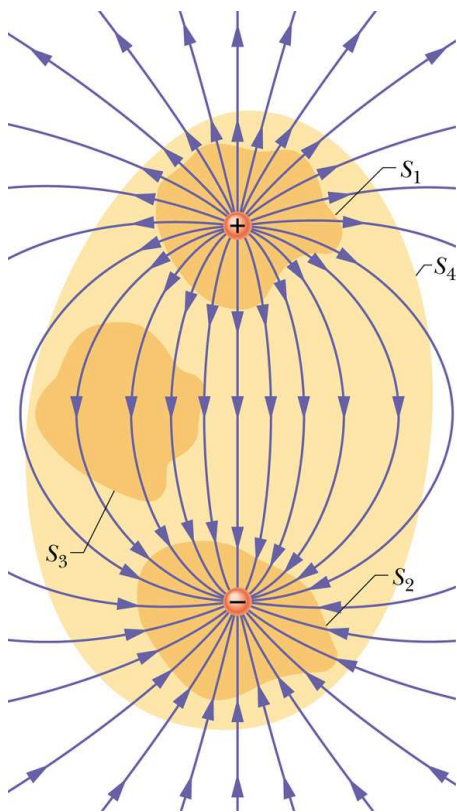
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i_{\text{celkový}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Gaussův zákon

Celkový tok vektoru intenzity elektrického pole nábojů $q_1, q_2, \dots, q_n$ (v případě spojitého rozložení nábojů je třeba uvažovat rozložení nábojů v objemu, ploše nebo přímce, hustotu náboje) uzavřenou plochou S je přímo úměrný celkovému náboji uzavřenému v oblasti jejíž hranicí je plocha S .



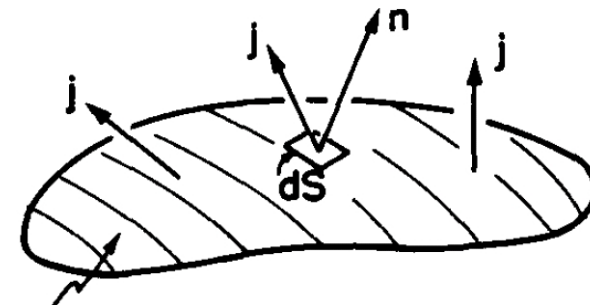
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

Z Gaussova zákona vyplývá, že zdrojem elektrického pole jsou elektrické náboje. Náboj má dvě možné orientace, kladnou a zápornou. Elektrické čáry vychází z nábojů kladných a končí na nábojích záporných. Tedy čáry elektrického pole jsou orientované křivky, které se uzavírají na nábojích opačného znaménka nebo míří pryč směrem od náboje.

Zákon zachování náboje - rovnice kontinuity.

Vyjádřením zákona zachování elektrického náboje je rovnice kontinuity. Celkový náboj procházející za jednotku času nějakou plochou S se nazývá **elektrický proud I** :

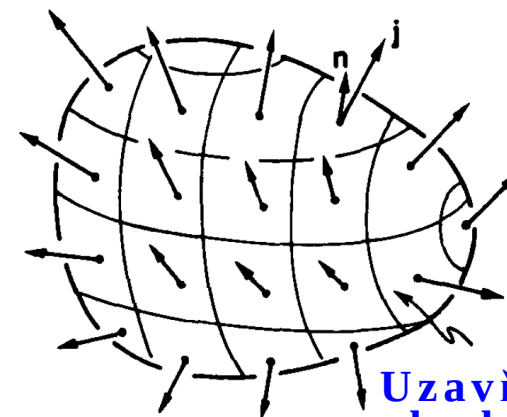
$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$



Plocha S .

Proud vycházející z uzavřené plochy je roven rychlosti, s níž náboj uniká z objemu V ohraničeného plochou S . Elektrický náboj jenezničitelný, může se pohybovat, ale nikde se neztrácí a nezaniká. To znamená, že vytéká-li z určité ohraničené oblasti elektrický náboj, pak se musí v dané oblasti zmenšovat jeho množství. Zákon zachování náboje pak vyjadřuje vztah, který nazýváme **rovnicí kontinuity**:

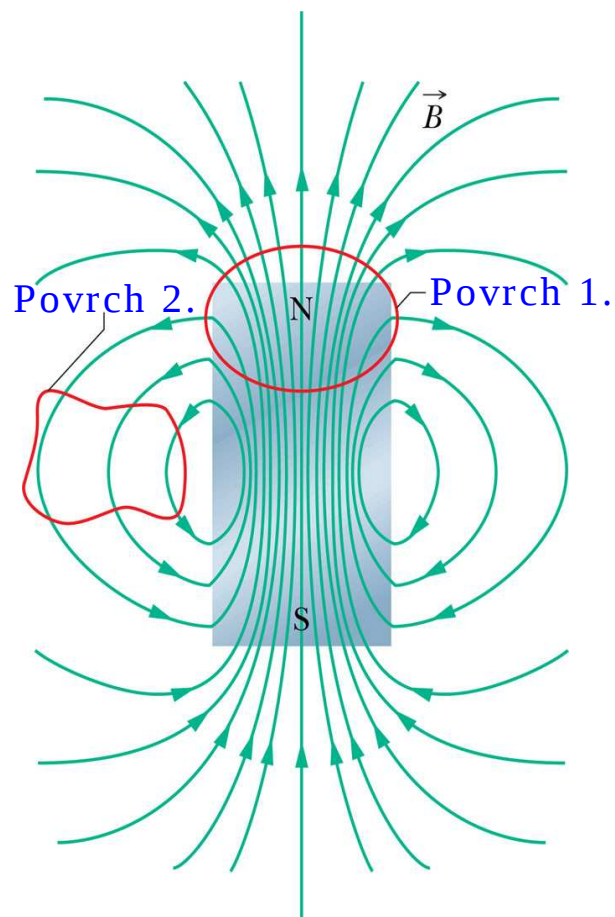
$$\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} (Q_{\text{uvnitř}}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$



Uzavřená plocha S .

Diferenciální tvar rovnice kontinuity:

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

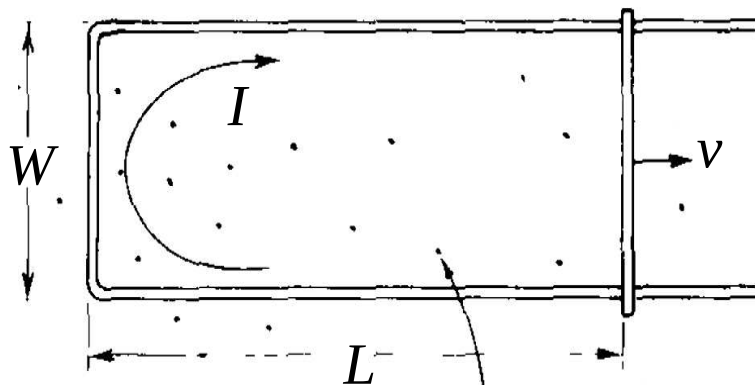
Magnetismus je vždy důsledkem existence elektrických proudů, čáry magnetického pole vytvářejí okolo těchto proudů **uzavřené smyčky**. To znamená, že čáry **B** nikde nezačínají a ani nekončí, tedy neexistuje něco, jako magnetické náboje. Vyjádřením této skutečnosti je to, že tok vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou je vždy roven nule.

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Rovnice $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ je diferenciální formou popisu skutečnosti, že tok vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou je nulový a říká, že divergence toku vektoru magnetické indukce z infinitesimálního objemu, jehož hranicí je plocha S je nulový. Uvnitř tohoto objemu neexistuje analog kladných a záporných elektrických nábojů a čáry pole jsou uzavřené křivky, které do tohoto objemu vstupující z tohoto objemu opět vystupují. Toto tvrzení platí jak v magnetostatice, tak magnetodynamice.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Několik slov k Faradayovu zákon elektromagnetické indukce.



1. Pohybující se vodivá příčka.

- z Faradayova zákona vyplývá pro velikost indukované emn:

$$\mathcal{E} = w B \frac{dl}{dt} = w B v$$

Indukované emn. musí ^{B} jít vysvětlit i ze vztahu $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Na náboje v pohybující se mřížce působí tangenciální složka Lorentzovy síly, která je rovna vB . Tato síla je po celé délce příčky w konstantní a tedy platí:

$$\mathcal{E} = w B v$$

2. Příčka se nepohybuje, ale mění se magnetické pole.

- síla, působící na elektrické náboje je dána obecně vztahem $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Vztah pro sílu však neobsahuje žádný člen, který by vysvětloval silové působení na klidové náboje od změn magnetického pole. Síla působící na náboje v klidu tedy musí pocházet os členu $\mathbf{E}$. Z Faradayových pozorování vyplynulo, že se změnami magnetického pole je spojen vznik elektrického pole, které pak pohání elektrony vodičem.

Souvislost vzniku elektrické pole v uzavřeném vodiči se změnami magnetického pole procházejícího plochou jejíž hranicí je uzavřená vodivá smyčka vysvětluje Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Výsledek fyzikálního experimentu, jež je obsahem tvrzení:

Elektromotorické napětí v obvodu je rovno rychlosti změny magnetického toku plochou jejíž hranicí je uzavřená vodivá smyčka.

Výsledek experimentu lze poté vysvětlit na základě **dvou různých** fyzikálních jevů. To znamená, že ve vodičích pohybujících se ve stacionárním magnetickém poli se objevuje síla pocházející od druhého členu vztahu $\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, zatímco v případě proměnného magnetického pole vzniká pole $\mathbf{E}$, které je pak zdrojem síly pohybující náboji ve vodiči.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Rovnice je Maxwellovým zobecněním Ampérova zákona, odvozeného pro stacionární elektrický proud:

$$(1) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{celkový}}$$

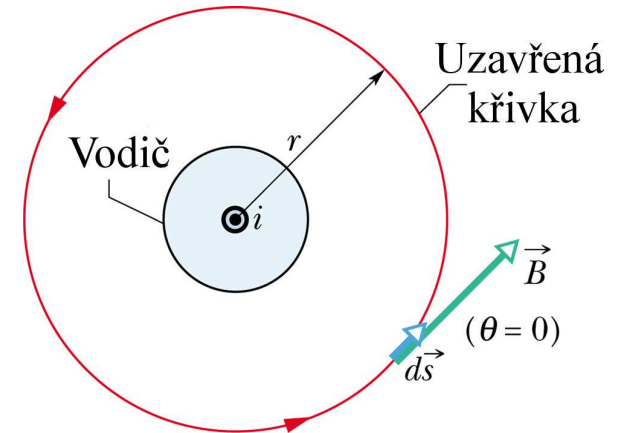
Spočtěme čemu se rovná divergence Ampérovy rovnice:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \vec{j}_{\text{celkový}}) = 0$$

Z rovnice kontinuity však vyplývá, že pravá strana je rovna rychlosti změny množství náboje v objemu. To znamená, že s rovnicí Ampérova zákona je něco v nepořádku, náboj se nezachovává! Tok náboje musí vždy mít nějaký zdroj. Řešení našel J.C. Maxwell přidáním členu $\epsilon_0(\partial \vec{E}/\partial t)$ na pravou stranu rovnice (1). Dostal tak rovnici, která splňuje zákon zachování náboje.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{celkový}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Člen $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ nazýváme Maxwellův proud.



Význam Maxwellova členu

Význam Maxwellova členu, bývá označován též jako **posuvný proud**, nejlépe vyplyne z příkladu, kdy nabíjíme kondensátor zapojený do obvodu.

Elektrický proud při nabíjení kondensátoru je roven: $I = \frac{dq}{dt}$

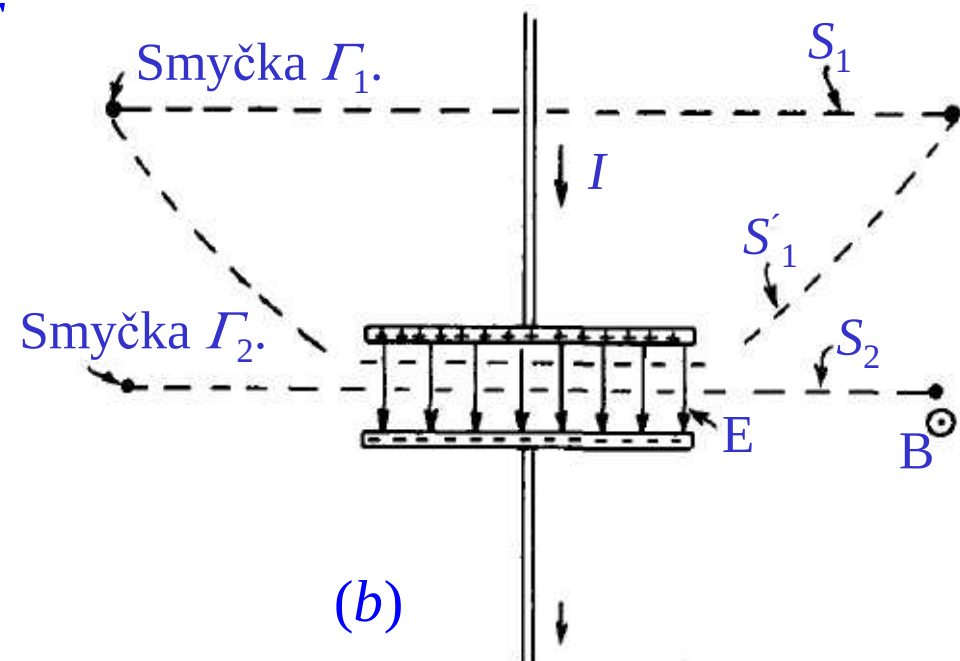
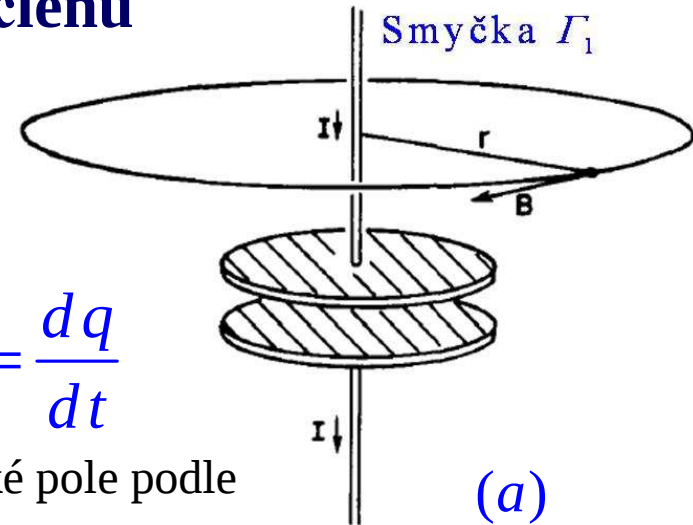
Tento proud vytvoří v okolí přívodních vodičů magnetické pole podle **B** dané ampérovým zákonem:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

kde r je poloměr kružnice Γ_1 .

Uvážíme-li tok Maxwellova proudu plochou **S** jejíž hranicí je kružnice Γ_1 , pak za předpokladu dobré vodivosti vodiče bude tento tok nulový.

Posuneme-li dále po vodiči smyčku až mezi desky kondensátoru, proud I zmizí, mezi deskami netečou žádné volné náboje. Otázkou je, zda bude nulové i magnetické pole?



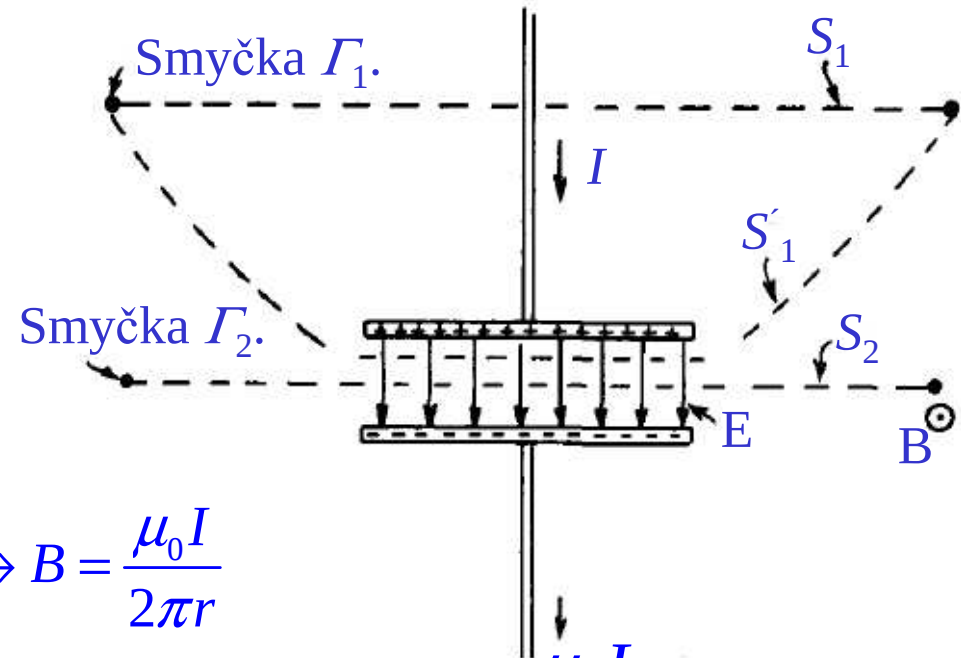
Z Maxwellových rovnic vyplývá: Křivkový integrál $\mathbf{B}$ po křivce Γ_2 ohraničující plochu S_2 procházející mezi deskami kondensátoru, je roven časové derivaci toku $\mathbf{E}$ rovinou plochy S_2 . Z Gaussova zákona $\nabla \cdot \mathbf{E} = q/\epsilon_0$ pak vyplývá pro magnetické pole $\mathbf{B}$ rovnice:

$$2\pi r B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{\epsilon_0} \right) = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Což je rovno vztahu odvozenému pro vodič jímž protéká proud I : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Je to stejný výsledek, jako když použijeme plochy S_1 a S'_1 jejichž hranicí je křivka Γ_1 . Plochou S_1 teče elektrický proud I , ale není tam žádné elektrické pole $\mathbf{E}$, naopak plochou S'_1 neteče žádný proud, ale mění se tok elektrického pole touto plochou a to rychlostí I/ϵ_0 .

Tedy integrací přes proměnné elektrické pole dostaneme totéž magnetické pole, jako když integrujeme přes proud ve vodiči. To znamená, že proměnné elektrické pole je zdrojem pole magnetického. Tento jev je symetrický k Faradayovu zákonu elektromagnetické indukce.



Důsledky Maxwellova zobecnění rovnic elektrického a magnetického pole.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Rovnice charakterizují pole **E** a **B** z hlediska jejich vztahu ke zdrojům těchto polí.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Rovnice popisují vzájemný vztah mezi poli **E** a **B**, a říkají, že tato pole nejsou vzájemně nezávislá. To znamená, že jsou-li tato pole proměnná v čase, pak jsou tato pole vzájemně závislá, existuje pouze **elektromagnetické pole**.

Zavedením Maxwellova členu do rovnic elektromagnetického pole má důležitý důsledek a to je vznik elektromagnetické vlnění a tedy šíření energie elektromagnetického pole prostorem rychlostí **c**. Použitím **identity** a úpravou vzniklých vztahů získáme z rovnic elektromagnetického pole vlnové rovnice polí **E** a **B**, šířících se vakuu.

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$$

Rychlost světla.

Zavedením nové konstanty c , do Maxwellových rovnic vztahem $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ dostaneme:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad c^2 (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Hodnota konstanty c , je číselně rovna rychlosti světla ve vakuu $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ která byla získána z experimentu. Na základě této shody Maxwell předpokládal, že světlo je elektromagnetické vlnění, který byl později experimentálně potvrzena.

Maxwellovy rovnice v látkovém prostředí.

V látkovém prostředí je třeba zahrnout do Maxwellových rovnic vztahy, které charakterizují látkové prostředí z hlediska jeho odezvy na elektromagnetické pole. Z hlediska polarizovatelnosti látky v elektrickém pole se zavádí vektor elektrické indukce (též vektor posunutí) **D**, v případě magnetických a magnetizovatelných látek se zavádí vektor magnetické intenzity **H**. V prvním přiblížení jsou tyto vlastnosti popsány lineárními rovnicemi, což ale obecně neplatí pro pole s vysokou hustotou energie. Ve vodivých prostředích je třeba zahrnout též Ohmův zákon (v diferenciálním tvaru) .

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad \mu \text{ je permeabilita látky, charakterizuje látku z hlediska její odezvy na vnější magnetické pole}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \varepsilon \text{ je permeabilita látky, charakterizuje látku z hlediska její odezvy na vnější magnetické pole}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{Diferenciální tvar Ohmova zákona } \gamma \text{ je vodivost látky.}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \gamma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$