

A photograph of a car driving on a wet, two-lane road towards a vibrant rainbow in a forest. The road is wet and reflects the car's headlights and the rainbow. The forest consists of tall evergreen trees on both sides of the road. The sky is a clear blue.

Elektromagnetické vlny.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

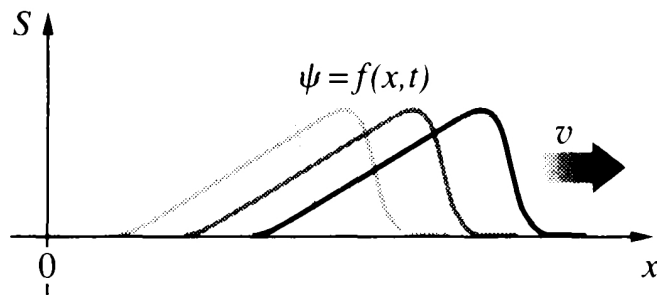
Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Eugene Hecht, Optics 4th edition

Vlnová funkce, vlnová rovnice.

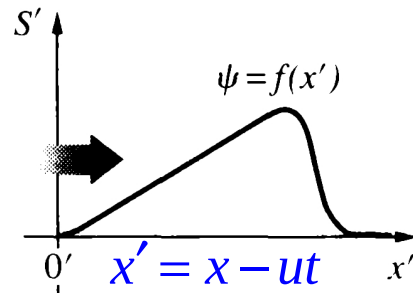


Postupující vlna je popsána vlnovou funkcí:

$$\psi(x, t) = f(x, t)$$

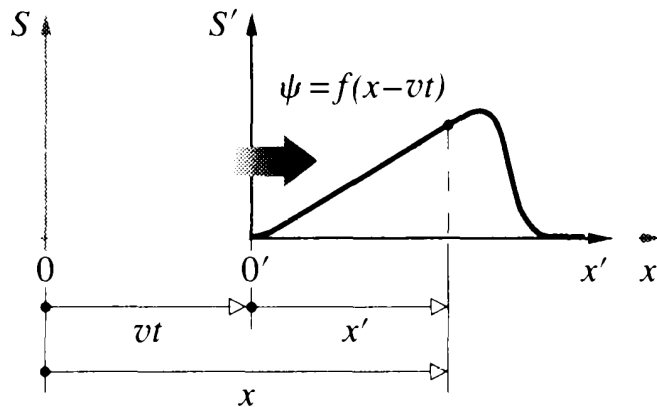
Tvar postupující vlny je dán rovnicí:

$$\psi(x, t)_{t=0} = f(x, 0) = f(x)$$



Za předpokladu, že při šíření vlnění prostorem nedochází ke změně tvaru postupující vlny platí pro vlnovou funkci:

$$\psi(x, t) = f(x \mp ut)$$

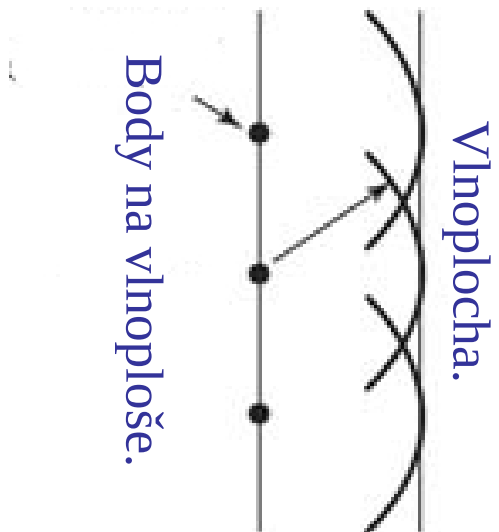
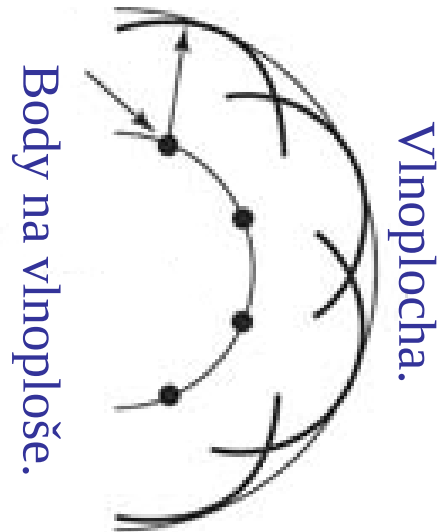


Šíření vlny v prostoru a v čase popisuje vlnová rovnice:

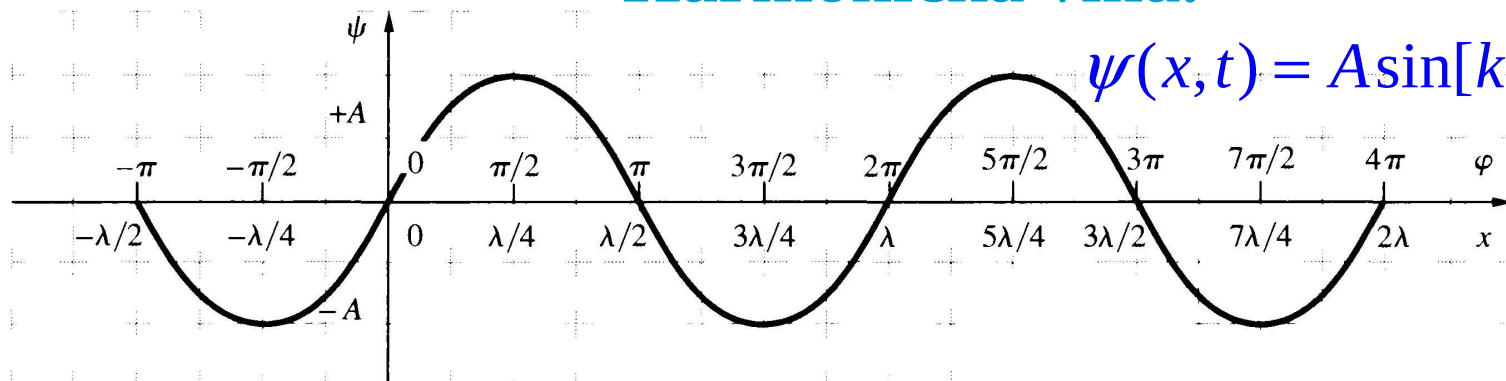
$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Vlnoplocha.

Vlnoplocha je myšlená plocha (množina bodů) proložená body se stejnou fází postupující vlny. Jednotlivé body na vlnoploše jsou zdroji vlnění.



Harmonická vlna.



$$\psi(x, t) = A \sin[k(x \mp ut) + \phi]$$

$$u = \lambda \nu$$

Periodou vlnění v prostoru je **vlnová délka**, periodu v čase pak **perioda**. Veličinu k nazýváme **vlnové číslo**, veličinu κ **vlnocet**, veličinu ν nazýváme **frekvence** vlnění, 2π násobek frekvence označujeme **úhlová frekvence** ω . Fázové posunutí označujeme **počáteční fáze** ϕ , rychlost šíření fáze vlny ϕ nazýváme **fázová rychlost** u .

$$\phi = (kx \mp \omega t + \phi)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{1}{\lambda}, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Různé formy zápisu harmonické vlny:

$$\psi = A \sin k(x \mp ut) \quad \psi = A \sin 2\pi(\kappa x \mp \nu t) \quad \psi = A \sin(kx \mp \omega t)$$

$$\psi = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right) \quad \psi = A \sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{u} \mp t\right)$$

Fázová rychlost postupné vlny.

$$\varphi = (kx \mp \omega t + \phi)$$

Rychlost změny fáze vlny v čase v daném pevném místě x je dána vztahem:

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x \right| = \omega$$

Rychlost změny fáze vlny v závislosti na poloze v daném pevném časovém okamžiku je dána vztahem:

$$\left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t \right| = k$$

Z platnosti vztahu:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_x / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_t$$

vyplývá pro fázovou rychlost vlny:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\varphi = \frac{-\omega}{k} = \pm u$$

Fázová rychlost vlny šířící se ve směru vzrůstající hodnoty souřadnice x bereme s kladným znaménkem, vlnu šířící se v opačném směru se zaporným znaménkem.

Princip superposice.

Vlnová rovnice je lineární parciální diferenciální rovnice. To znamená, že jsou řešením této rovnice vlnové funkce ψ_1 a ψ_2 , pak je řešením i jejich součet $(\psi_1 + \psi_2)$. Tedy máme dvě řešení vlnové rovnice pro něž platí:

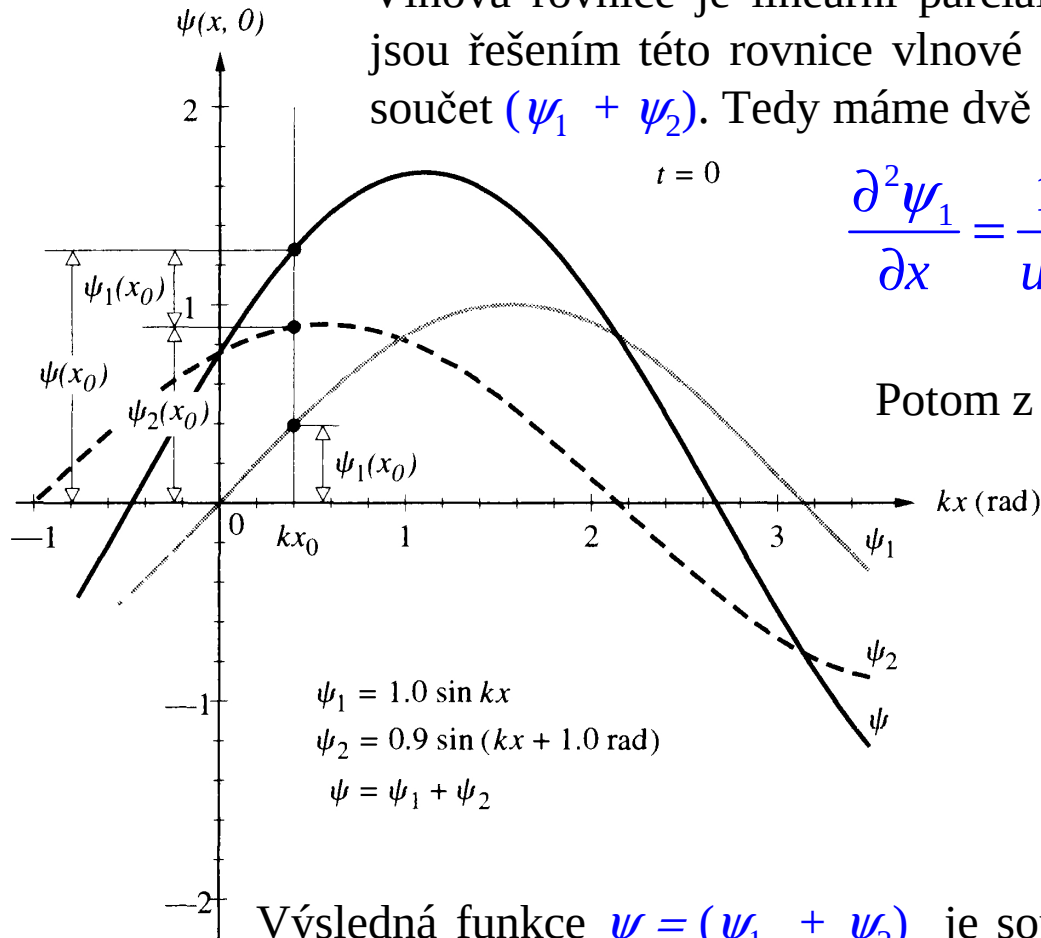
$t = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

Potom z linearitv vlnové rovnice vyplývá rovnice:

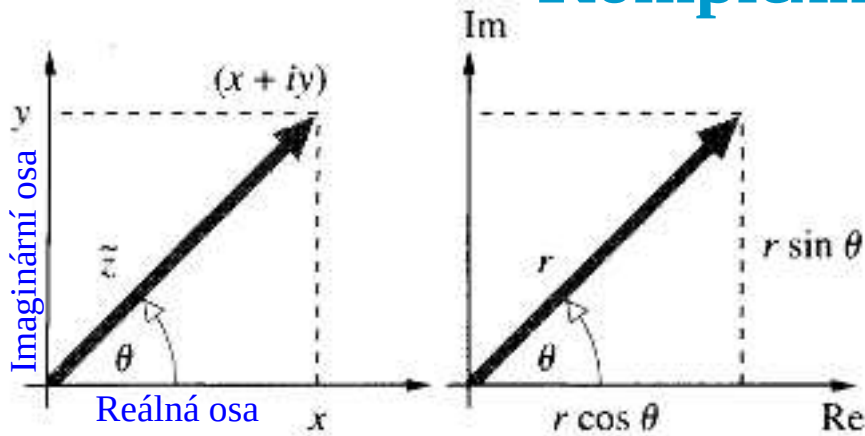
$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 + \psi_2)$$



Výsledná funkce $\psi = (\psi_1 + \psi_2)$ je součtem hodnot obou funkcí v bodě (x, t) . Fyzikálně to znamená, že výsledná amplituda součtové vlny dvou vzájemně se překrývajících vln je dána součtem amplitud dvou jednotlivých vln v daném bodě x a daném čase t .

Komplexní reprezentace.



Vlnovou funkci je výhodné vyjádřit v komplexní reprezentaci.

Komplexní číslo z je definováno: $z = x + iy$

Číslo komplexně sdružené k z : $\bar{z} = x - iy$

Goniometrický tvar komplexního čísla:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

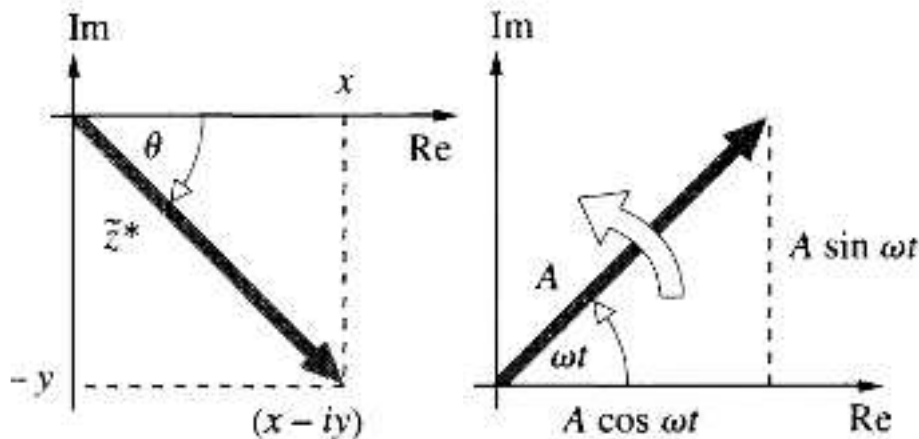
Kde pro reálnou a imaginární část platí:

$$x = r \cos \theta = \operatorname{Re} z \quad y = r \sin \theta = \operatorname{Im} z$$

Platí Eulerův vztah: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Potom pro komplexní číslo z platí:

$$z = r e^{i\theta} = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

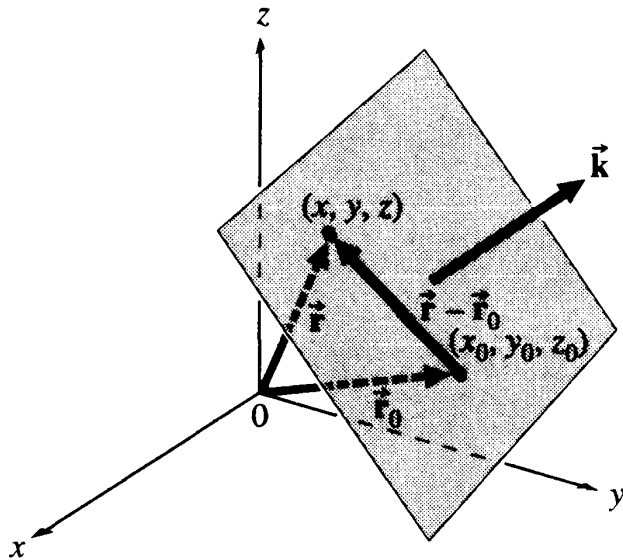


S použitím komplexní reprezentace pak píšeme vlnovou funkci: $\psi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \phi)}$

Konečný výsledek pak získáme přechodem k reálné části vlnové funkce:

$$\psi(x, t) = \operatorname{Re} \left[A e^{i(\omega t - kx + \phi)} \right] \rightarrow \psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Rovinná vlna.



Rovinná vlna je přiblížením postupné vlny ve velké vzdálenosti od zdroje vlnění. Všechny body rovinné vlny kmitají se stejnou fází a rovina je kolmá na směr šíření vlny $\mathbf{k}$. Matematická podmínka, kterou musí splňovat všechny body o polohovém vektoru $\mathbf{r}$ je vyjádřena vztahem:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = \text{konstanta} = a$$

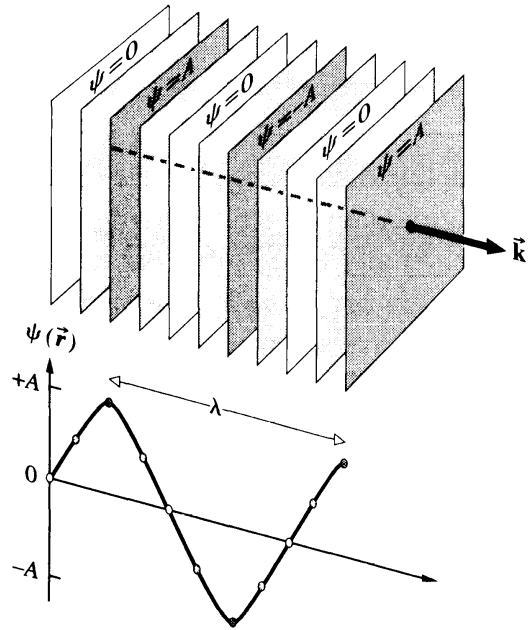
Kde: $a = \vec{r}_0 \cdot \vec{k} = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

Polohový vektor libovolného bodu: $\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$

Referenční bod je určen polohovým vektorem. $\vec{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$

Směr šíření rovinné vlny je dán polohovým vektorem: $\vec{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}}$



Periodicita vlny v prostoru je vyjádřena vztahem:

$$\psi(\vec{r}) = \psi\left(\vec{r} + \frac{\lambda \vec{k}}{k}\right)$$

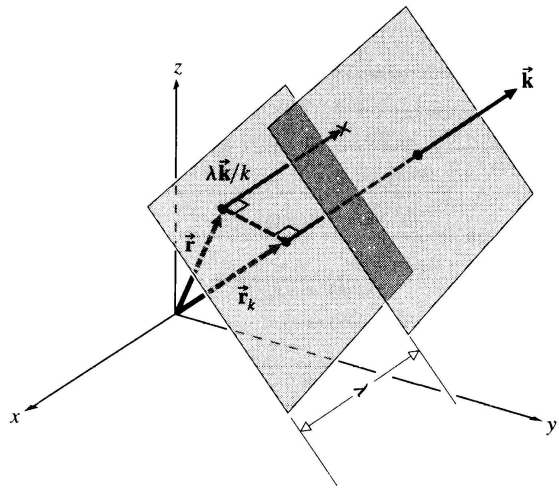
$$\psi(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = Ae^{i\vec{k} \cdot \left(\vec{r} + \frac{\lambda \vec{k}}{k}\right)} = Ae^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\lambda k}$$

Z podmínky periodicity: $e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$

dostaneme pro velikost vektoru $\mathbf{k}$:

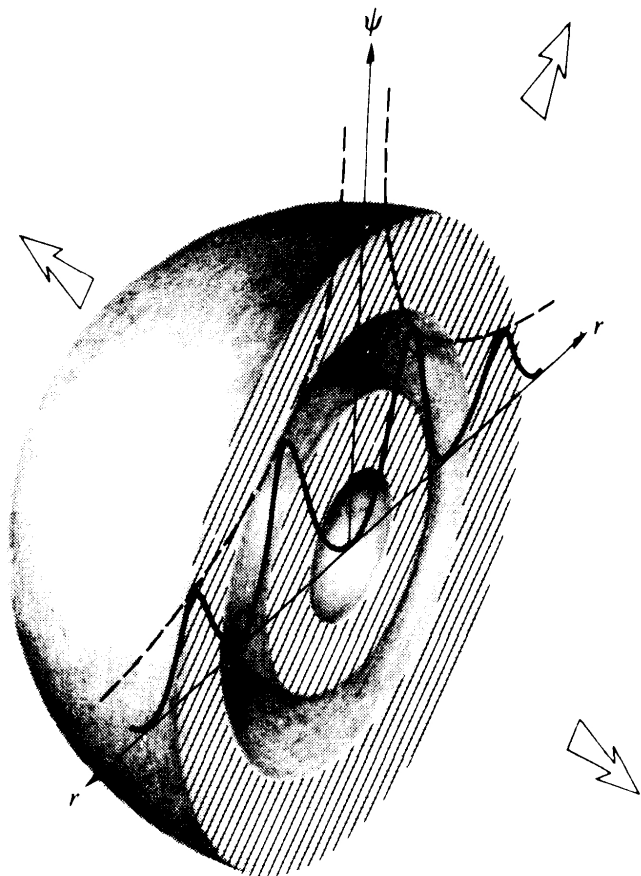
$$\lambda k = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Vektor $\mathbf{k}$ nazýváme **vlnový vektor**.



Vlnová funkce rovinné vlny je tedy dána vztahem:

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)}$$



Sférická vlna.

Harmonická sférická vlna:

$$\psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{A}{r} \right) \cos k(r \mp ut)$$

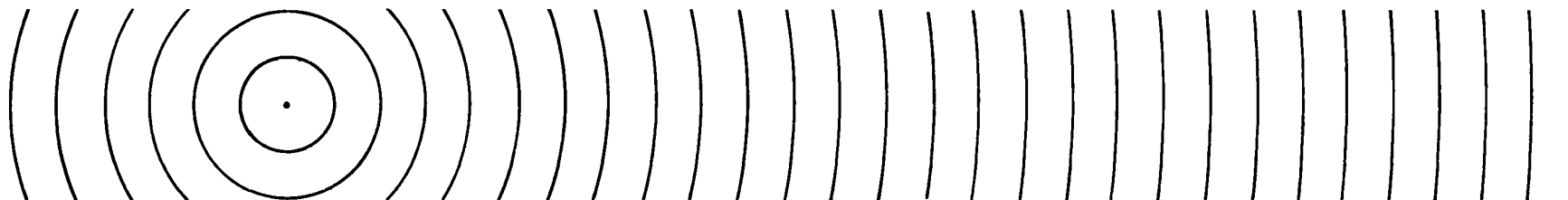
nebo:

$$\psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{A}{r} \right) e^{ik(r \mp ut)}$$

Je-li v argumentu $(r - ut)$ pak je sférická **vlna rozbíhavá (divergentní)**. Naopak je-li v argumentu $(r + ut)$, pak je **vlna sbíhavá**, nebo-li **konvergentní**.



Zplošťování sférické vlny s rostoucí vzdáleností od zdroje.



Elektromagnetické vlny.

Úpravou Maxwellových rovnic získáme matematické rovnice popisující šíření elektromagnetických vln ve volném prostoru. Vlnové rovnice popisují zvlášť elektrickou a zvlášť magnetickou složku elektromagnetické vlny. Rychlost šíření elektromagnetických vln ve volném prostoru je fyzikální konstantou c .

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Rychlost šíření fáze elektromagnetické vlny je ve vztahu k permitivitě a permeabilitě vakua:

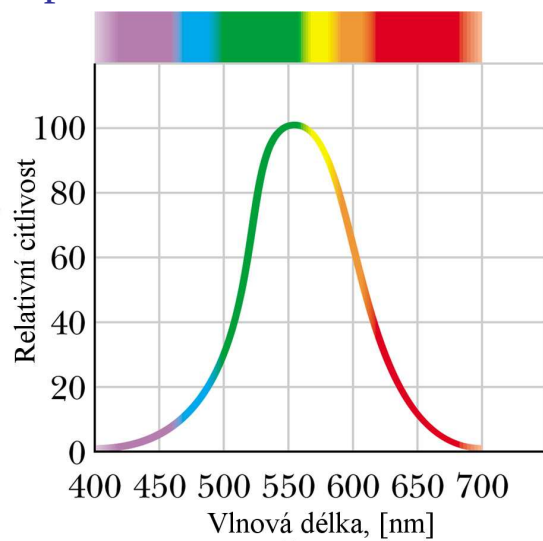
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ C}^2 \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2} \end{aligned} \rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 \approx 11,12 \cdot 10^{-18} \text{ s}^2 \text{ m}^{-2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{11,12 \cdot 10^{-18} \text{ s}^2 \text{ m}^{-2}}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ms}^{-1}$$

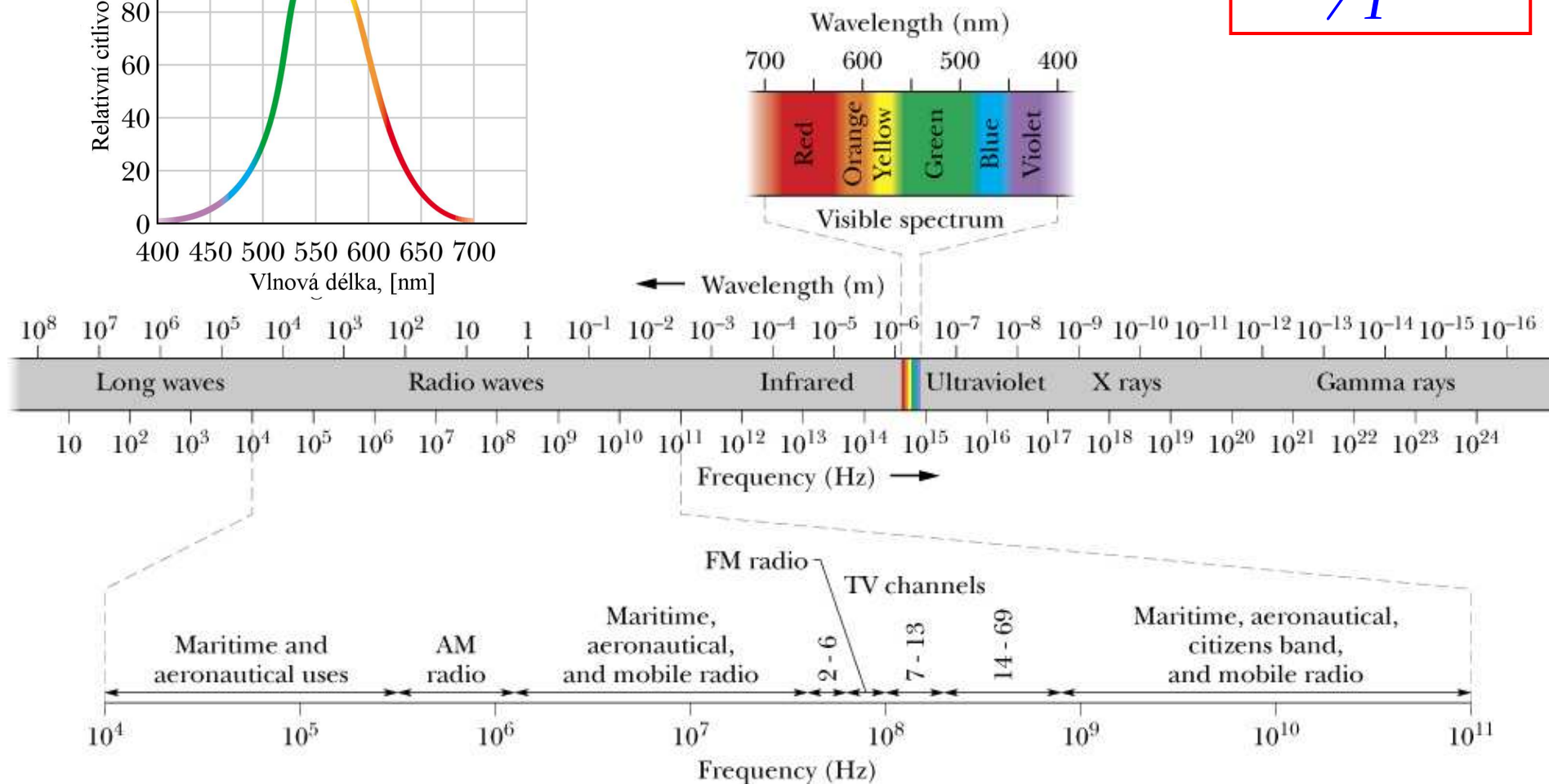
Spektrum elektromagnetických vln.

Spektrální závislost relativní spektrální citlivosti oka.

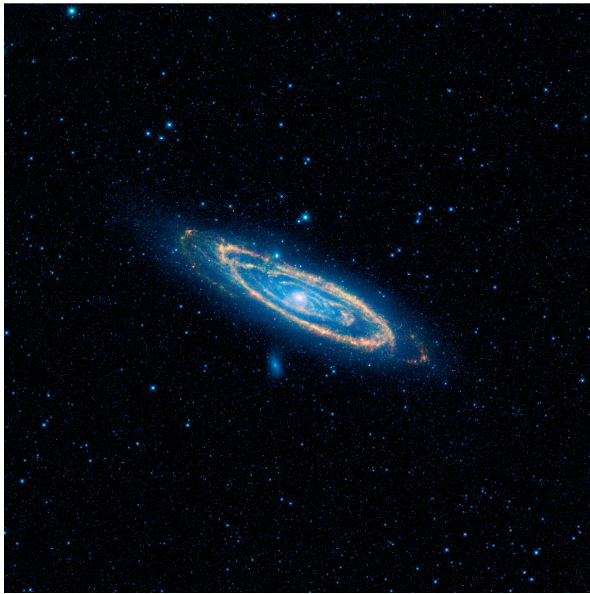


Mezi rychlostí c elektromagnetické vlny, vlnovou délkou λ a frekvencí ν platí vztah:

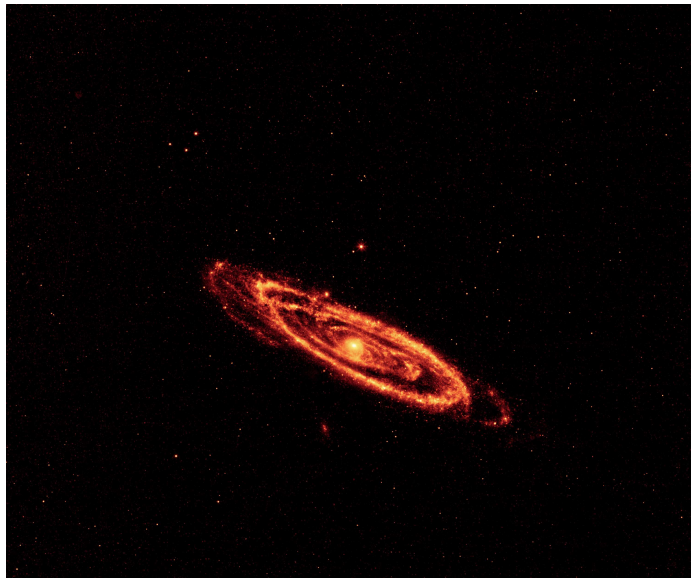
$$c = \lambda / T = \lambda \nu$$



Galaxie M31 Andromeda.



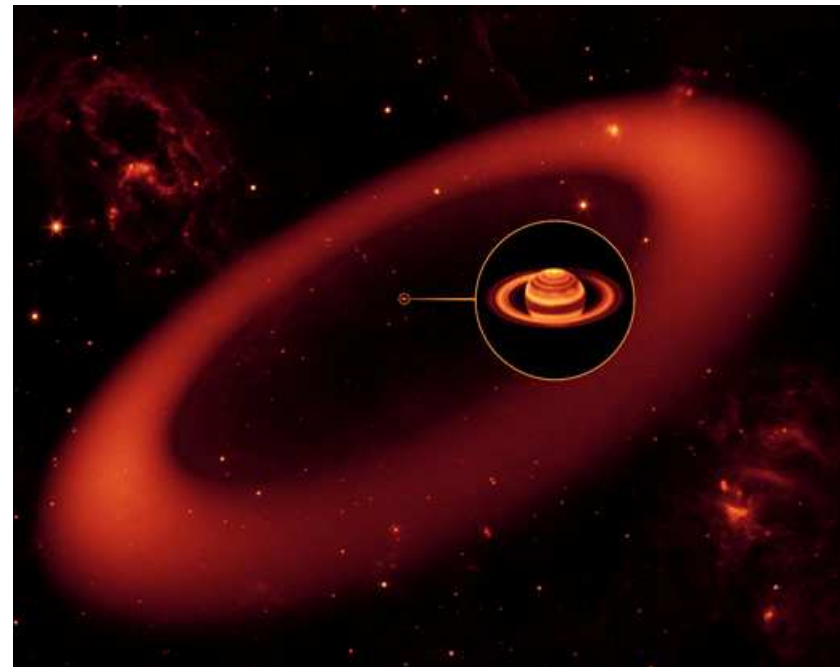
3.4 a 4.6-mikronů modrá; 12-mikronů zelená; 22-mikronů červená



12 micronů oranžová, 22 micronů červená



Ultrafialová oblast

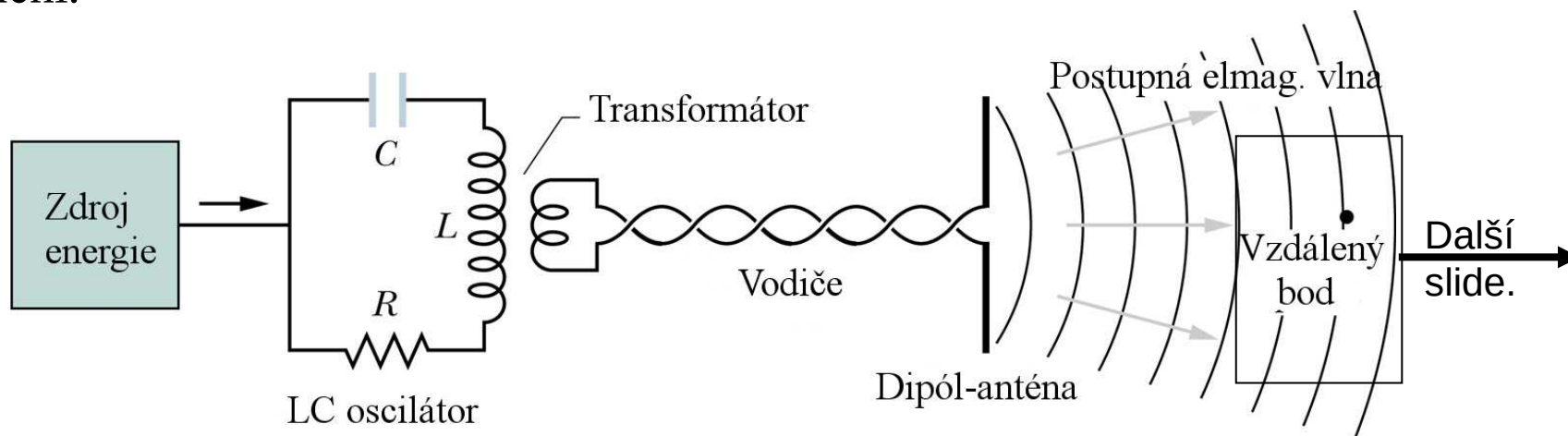


Saturn super prstenec.

Postupná elektromagnetická (EM) vlna.

Zdrojem RTG záření, γ záření, ultrafialového záření, viditelného a infračerveného záření jsou děje na atomární úrovni. Zdrojem radiových vln jsou elektronická zařízení.

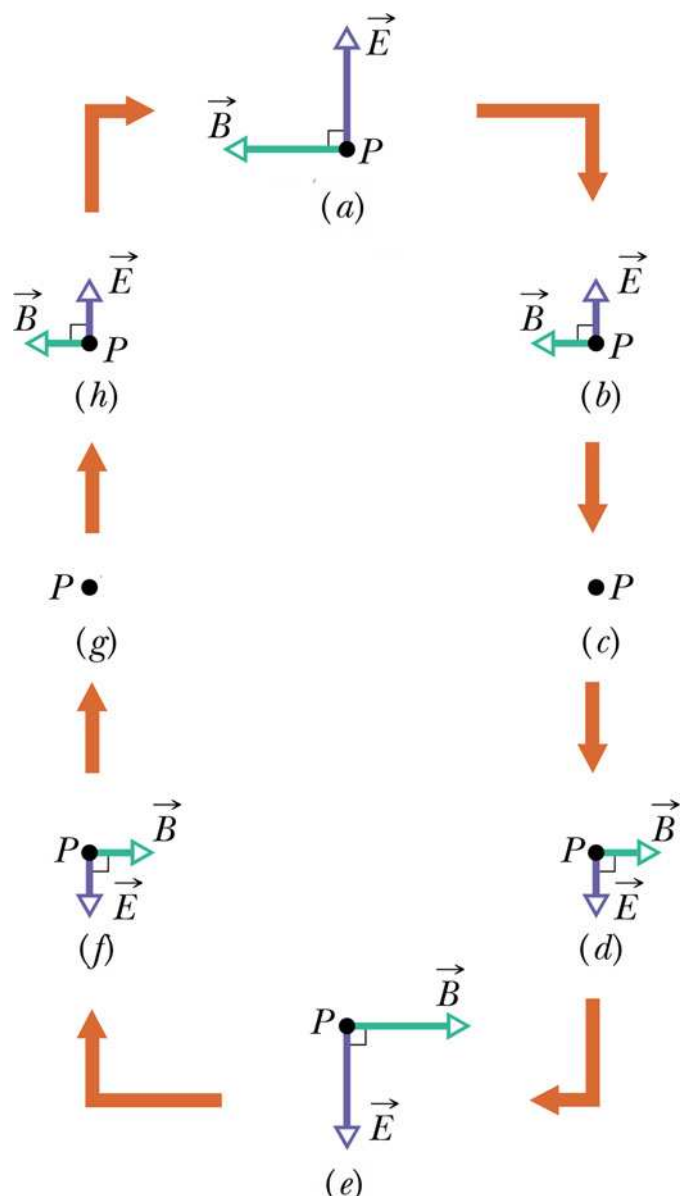
LC oscilátor je zdroj proměnného elektrického proudu, který následně vyvolá oscilující elektromagnetické pole šířící se prostorem jako elektromagnetické (EM) vlnění.



Frekvence kmitání:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Pole $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ v postupné elektromagnetické vlně.

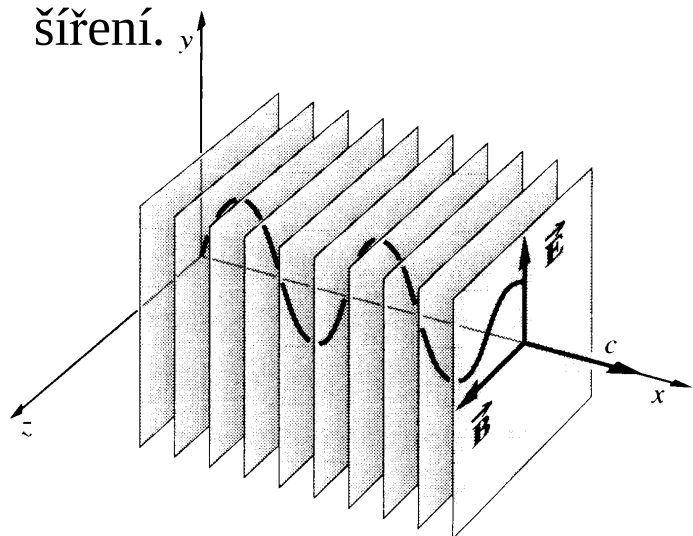


Obraz vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$, který bychom mohli pozorovat v místě P dostatečně vzdáleném od zdroje vlnění ve směru ke zdroji vlnění, tedy proti směru šíření elektromagnetické vlny.

1. Vektory polí $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou kolmé na směr šíření elektromagnetické vlny (rovinné vlny).
2. Vektory polí $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou vždy navzájem kolmé.
3. Vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ míří vždy ve směru šíření elektromagnetické vlny, tedy vlnového vektoru $\mathbf{k}$.
4. Velikosti vektorů $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ jsou v prostoru a čase sinové vlny a jsou vždy ve fázi.

Elektromagnetická vlnění je příčné vlnění.

Z experimentů vyplývá, že elektromagnetické vlnění je příčné vlnění, to znamená, že amplituda elektrického a magnetického pole se mění ve směru kolmém ke směru šíření.



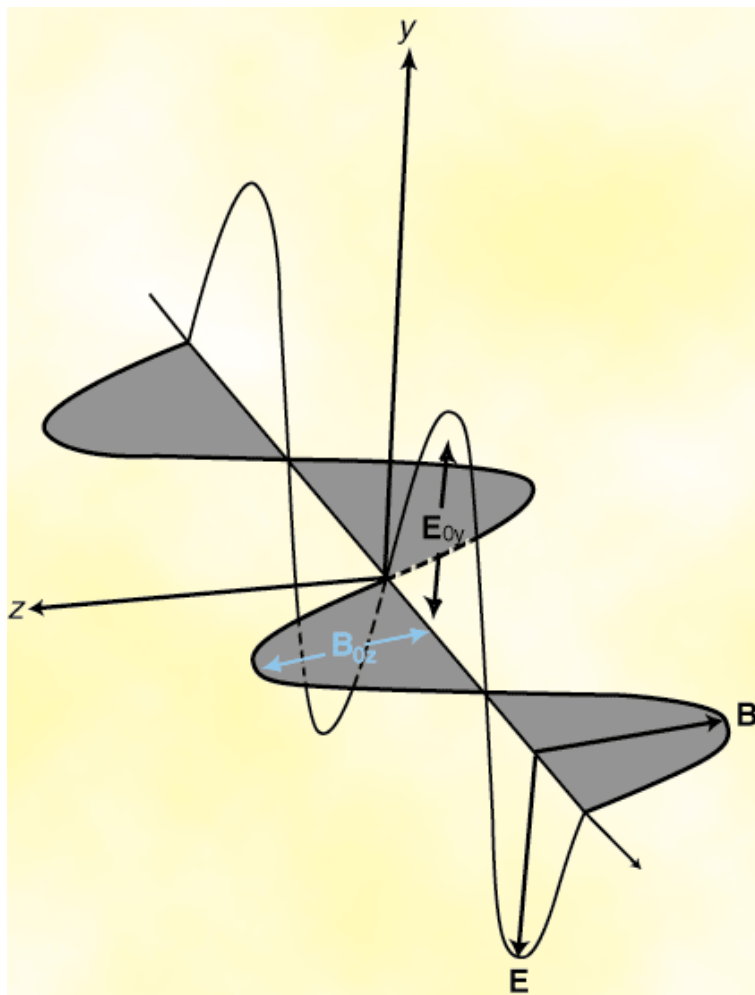
Předpokládejme, že máme rovinnou elektromagnetickou vlnu šířící se ve směru osy x . Vektor $\mathbf{E}$ je konstantní pro každou rovinu kolmou ke směru šíření (obrázek), to znamená, že $\mathbf{E}$ je pouze funkcí souřadnice x . Z rovnice

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{vyplývá:} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

To znamená, že složka elektrického pole ve směru šíření je konstantní, což je ale ve sporu s tím, že vlna je postupná. Tedy složka ve směru šíření vlny musí být nulová. Elektromagnetická vlna nemá složku ve směru osy x . Zvolením souřadné soustavy tak, aby vektor $\mathbf{E}$ mířil ve směru osy y , pak elektrické pole má pouze složku E_y . Takovou elektromagnetickou vlnu kde vektor $\mathbf{E}$ míří pouze v jednom směru nazýváme vlnou polarizovanou. Polarizovanou vlnu ve směru E_y pak zapíšeme:

$$\vec{E} = E_y(x, t) \hat{j}$$

Elektromagnetická vlnění je příčné vlnění.



$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

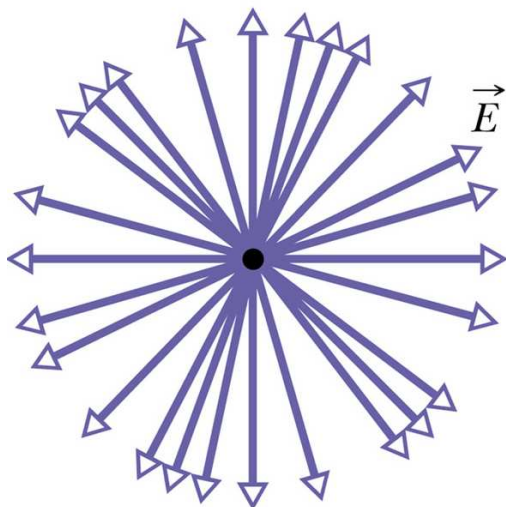
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Z uvedených rovnic vyplývá, B_x a B_y jsou konstantní, časově proměnná složka vektoru $\mathbf{B}$ je pouze B_z . Tedy platí

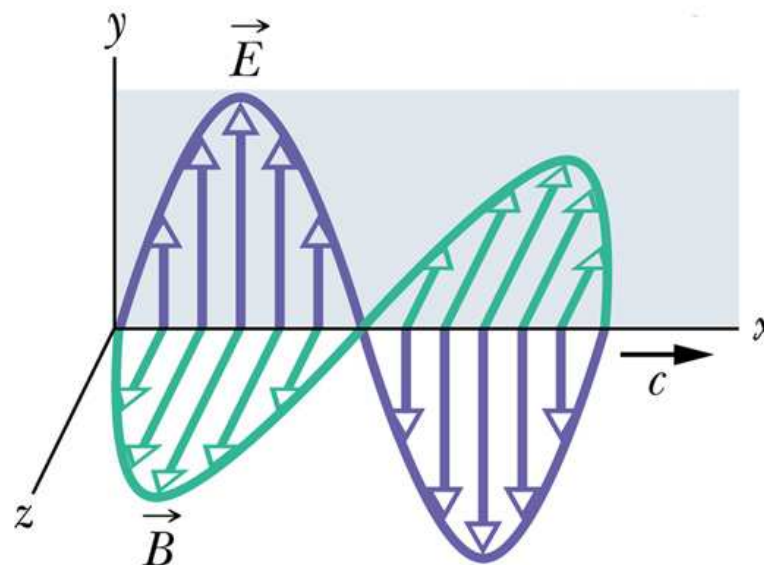
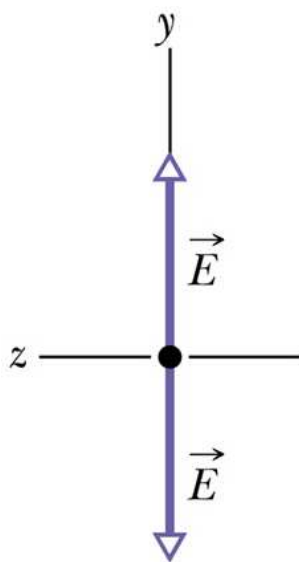
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Polarizovaná elektromagnetická vlna.



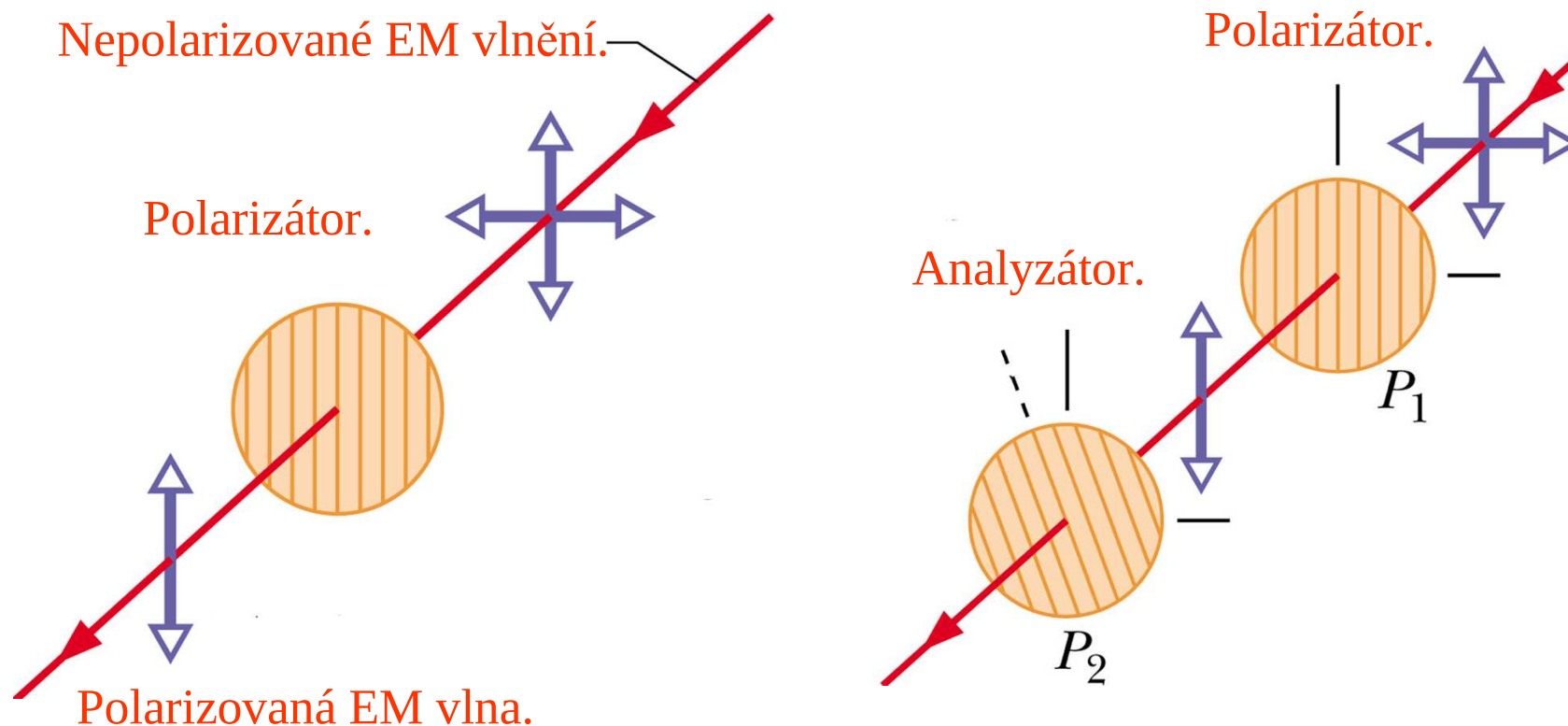
Směr vektoru elektrické intenzity $\vec{E}$ postupné elektromagnetické vlně míří obecně v libovolném směru kolmém na směr šíření vlny – **vlňení je nepolarizované**.

Kmitá-li vektor elektrické $\vec{E}$ pouze v jednom směru kolmém na směr šíření vlny pak je – **vlňení polarizované**.



Polarizace elektromagnetické vlny.

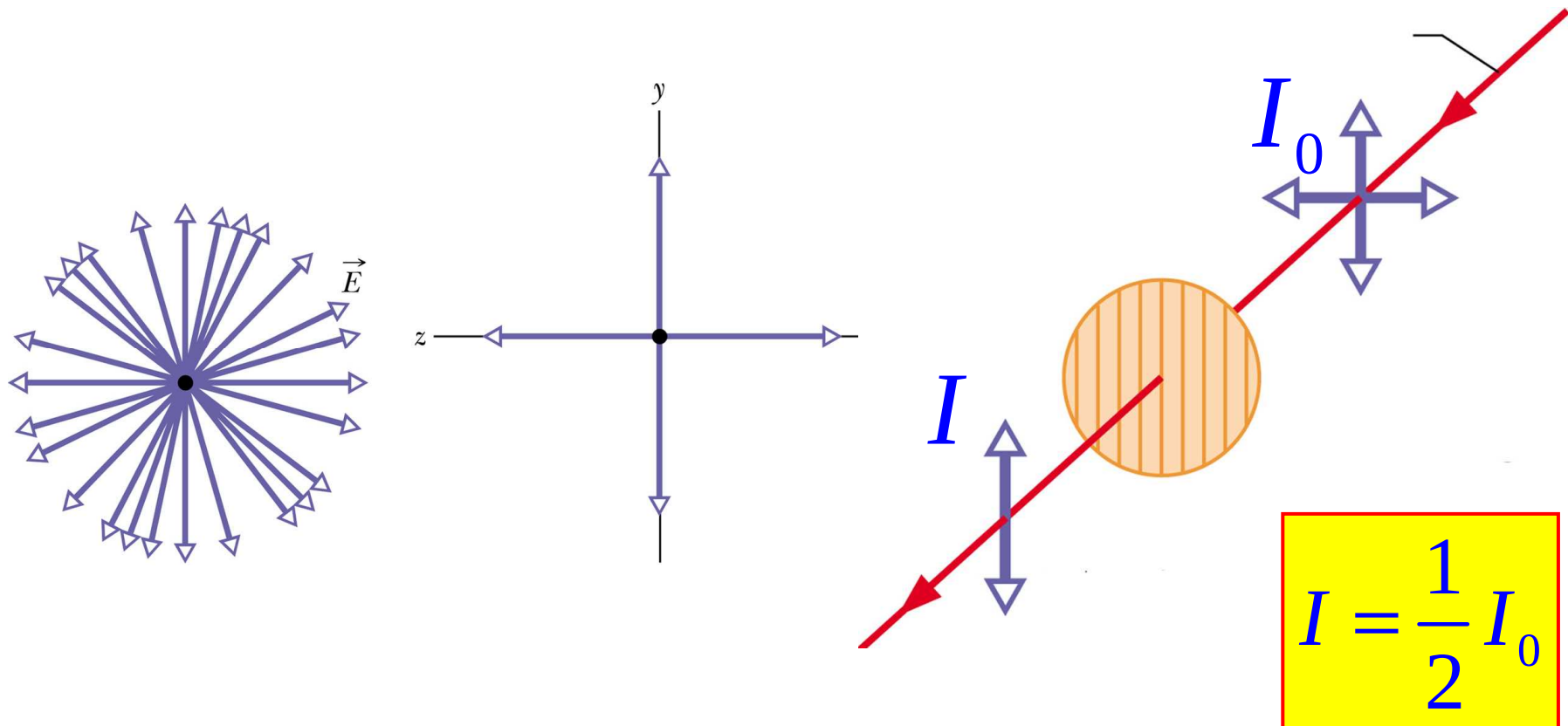
Polarizaci elektromagnetické vlny lze provést několika různými způsoby. Prvek, který vybírá z nepolarizované EM vlny jeden směr v němž kmitá vektor **E** nazýváme **polarizátor**.



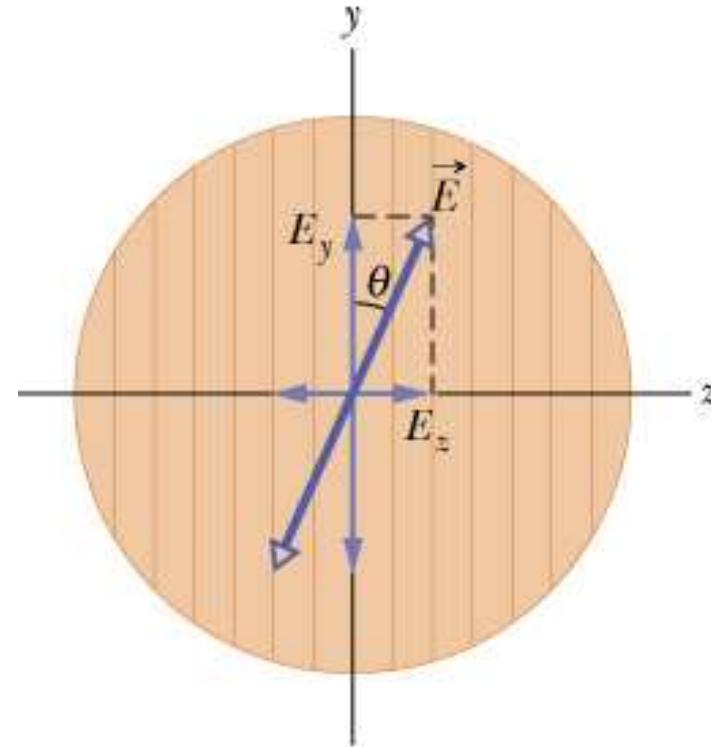
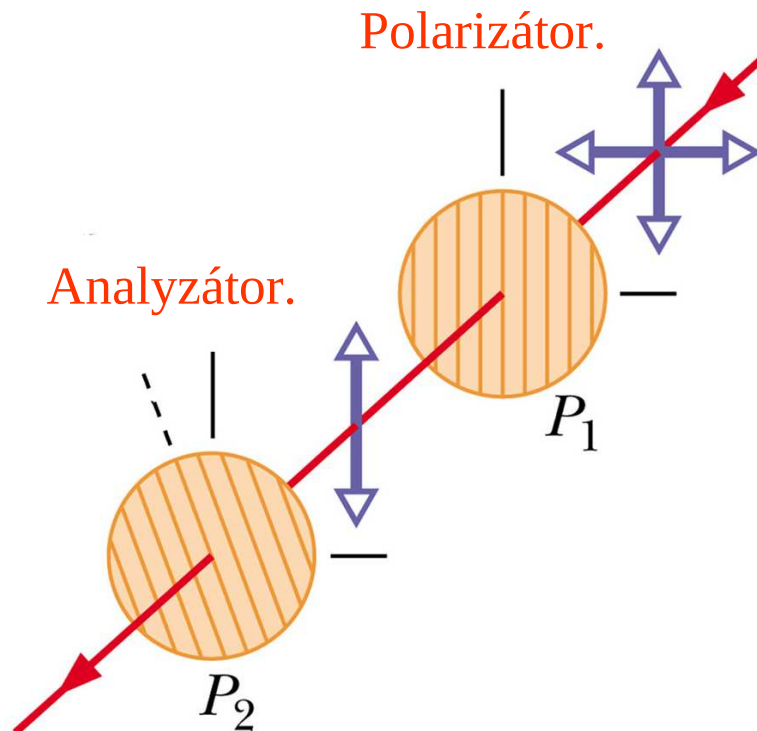
Jak zjistím, jaká je polarizace elektromagnetické vlny? Použiji druhý polarizátor – **analyzátor** – a najdu polohu, kde je intenzita procházející EM vlny maximální.

Intenzita polarizované elektromagnetické vlny.

Nepolarizovanou vlnu můžeme zobrazit tak, že pro každý směr kmitů rozložíme vektor $\mathbf{E}$ do složek E_y a E_z . Pak předpokládejme, že nepolarizované EM vlnění prochází polarizátorem orientovaným s osou y . Intenzita elektromagnetického vlnění za polarizátorem pak bude dána pouze součtem složek E_y od všech směrů v nichž vektor $\mathbf{E}$ kmitá. Složka ve směru osy z je potlačena.



Intenzita transmitované polarizované EM vlny.



$$E = E_y = E \cos \theta$$

Intenzita EM za analyzátorom je dána vzťahom:

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

Vztah intenzity E a indukce B .

Předpokládejme lineárně polarizovanou harmonickou vlnu tvaru:

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos[\omega(t - x/c) + \phi] \quad (1)$$

Magnetická indukce odpovídající harmonické vlně je dána vztahem:

$$B_z = \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt$$

po dosazení za E_y a vyčíslení derivace a integrálu dostaneme vztah pro magnetickou indukci vztah:

$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos[\omega(t - x/c) + \phi] \quad (2)$$

srovnáním (1) a (2) dostaneme:

$$E_y = cB_z$$

To znamená, že E_y a B_z se liší pouze o skalár c a jsou tedy ve fázi v každém bodu prostoru. Navíc z platnosti

$$\vec{E} = E_y(x, t) \hat{\mathbf{j}}$$

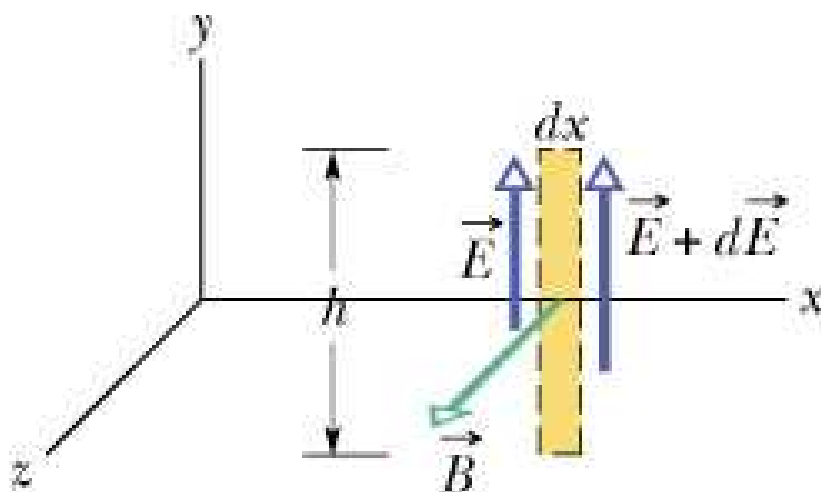
$$\vec{B} = B_z(x, t) \hat{\mathbf{k}}$$

vyplývá, vzájemná kolmost vektorů a dále to, že vektorový součin $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ míří ve směru šíření elektromagnetické vlny.

Postupná EM vlna

Indukované elektrické pole.

Z Faradayova zákon elektromagnetické indukce vyplývá, že změny magnetického pole indukují elektrické pole.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E + dE)h - Eh = h dE$$

$$\Phi_B = (B)(h dx)$$

$$\rightarrow h dE = h dx \frac{dB}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$$

Srovnáním rovnic: $\frac{\partial E}{\partial x} = kE_m \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_m \cos(kx - \omega t)$

dostaneme:

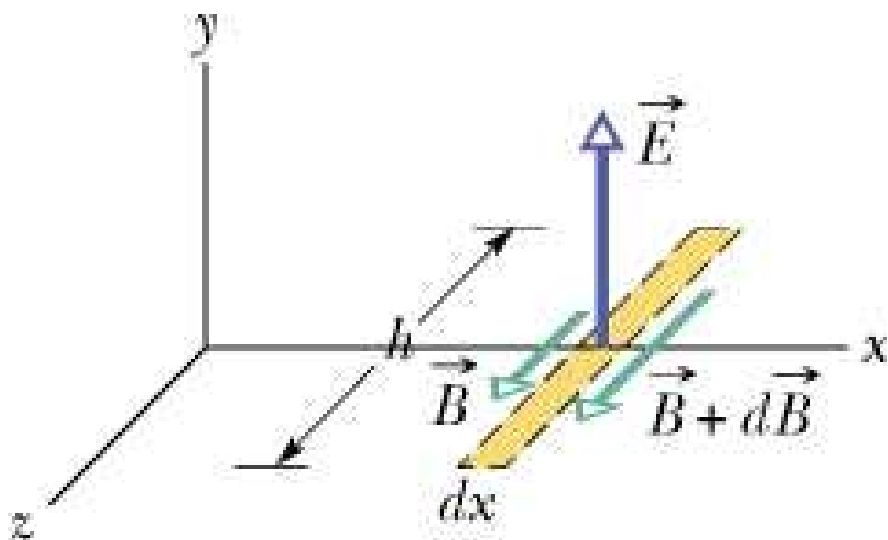
$$kE_m \cos(kx - \omega t) = -\omega B_m \cos(kx - \omega t) \rightarrow \frac{E_m}{B_m} = c$$

Postupná EM vlna

Indukované magnetické pole.

Z Ampér - Maxwelllova zákona:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = -(B + dB) - Bh = h dB$$

$$\Phi_E = (E)(h dx) \rightarrow \frac{d\Phi_E}{dt} = h dx \frac{dE}{dt}$$

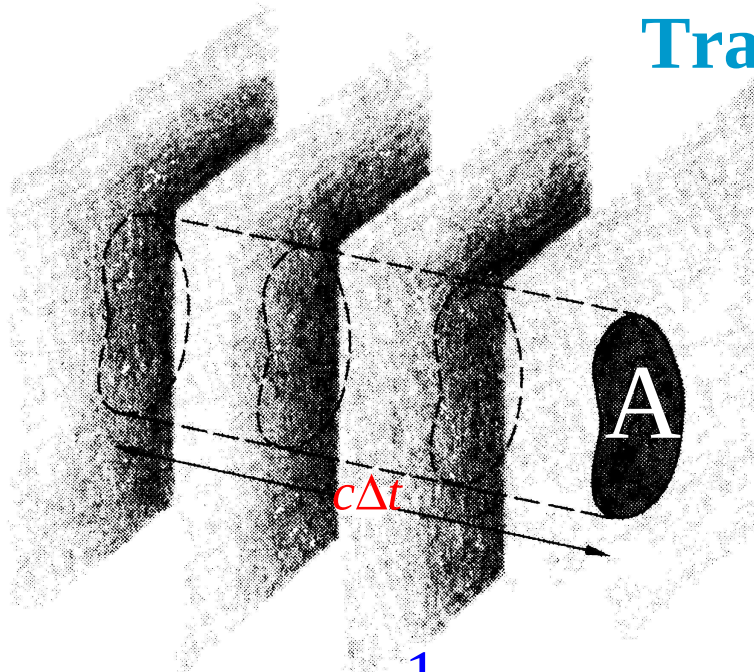
$$\rightarrow -h dB = \mu_0 \epsilon_0 \left(h dx \frac{dB}{dt} \right)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$-kB_m \cos(kx - \omega t) = -\mu_0 \epsilon_0 \omega E_m \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 (\omega/k)} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c} = c \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Transport EM energie.



Hustota elektrického pole: $u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$

Hustota magnetického pole: $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

➞ Z platnosti vztahů:

$$E = cB, \quad c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

vyplývá $u_E = u_B$

Nebo-li: $u = \frac{1}{\mu_0} B^2$ nebo: $u = \epsilon_0 E^2$

Celková energie elektromagnetického pole která projde plochou A za čas Δt :

$$S = \frac{uc\Delta tA}{\Delta tA} = uc \rightarrow S = \frac{1}{\mu_0} EB$$

Energie elektromagnetického pole se šíří ve směru šíření vlny, pak pro šíření energie platí vztah:
Vektor $\mathbf{S}$ je Poytingův vektor.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$