



Elektrický obvod.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

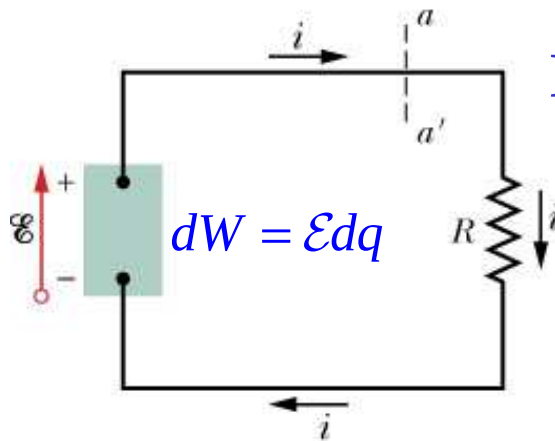
Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics, 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

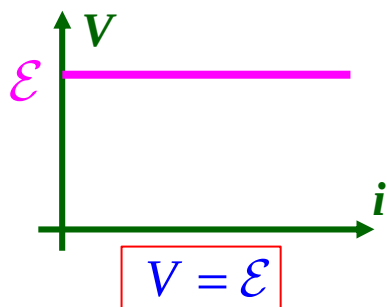


Elektromotorického napětí.

Elektrický obvod obvykle obsahuje, vodiče, aktivní a pasivní prvky, zdroje elektromotorického napětí.

Elektromotorická síla (emf – electromotive force) je která koná práci při přemístění jednotkového náboje mezi dvěma místy elektrického obvodu o různém potenciálu. Zdrojem elektromotorické síly je zdroj elektromotorického napětí.

Ideální zdroj emf.

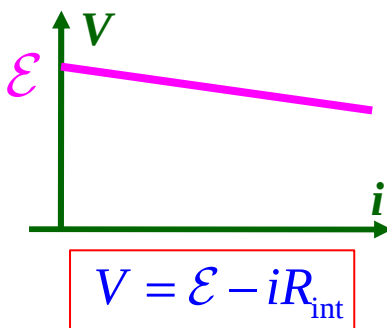


Ideálním zdroj elektromotorické síly.

Potenciálový rozdíl V mezi jeho svorkami (na obrázku a a b) nezávisí na elektrickém proudu, který zdrojem protéká. Platí tedy: .

$$V = \mathcal{E}$$

Skutečný zdroj emf.



Reálný zdroj elektromotorické síly.

Potenciálový rozdíl V mezi jeho svorkami (na obrázku a a b) klesá s procházejícím elektrickým, podle vztahu:

$$V = \mathcal{E} - iR_{\text{int}}$$

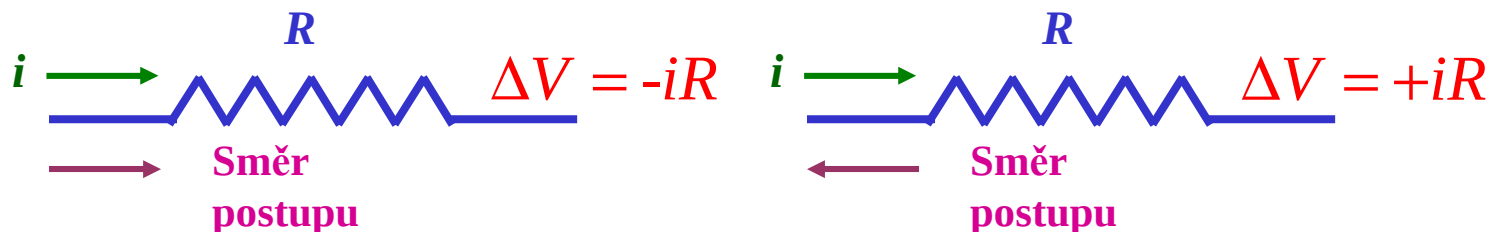
R_{int} je vnitřní odpor zdroje elektromotorického napětí.

Znaménková konvence.

Při výpočtech je třeba vzít vždy v úvahu směr ve kterém se v obvodu pohybujeme a podle toho přiřadit hodnotám proudu i a napětí $\rightarrow$ správná algebraická znaménka.

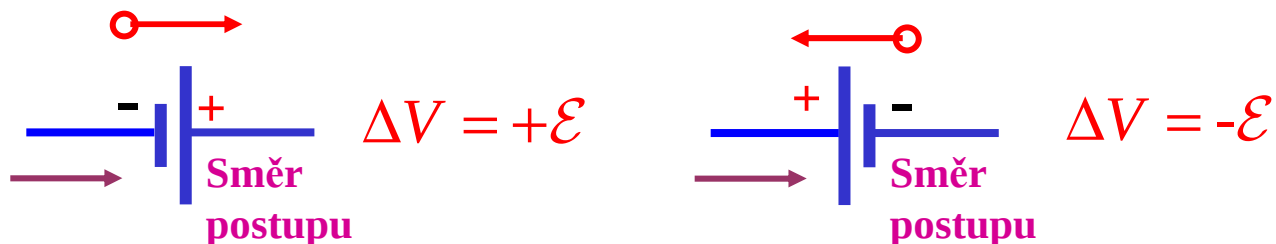
Pravidlo 1.

Pohybujeme-li se ve orientaci protékajícího elektrického proudu, pak je změna potenciálu na odporu $(-iR)$ a naopak při opačné orientaci $(+iR)$.



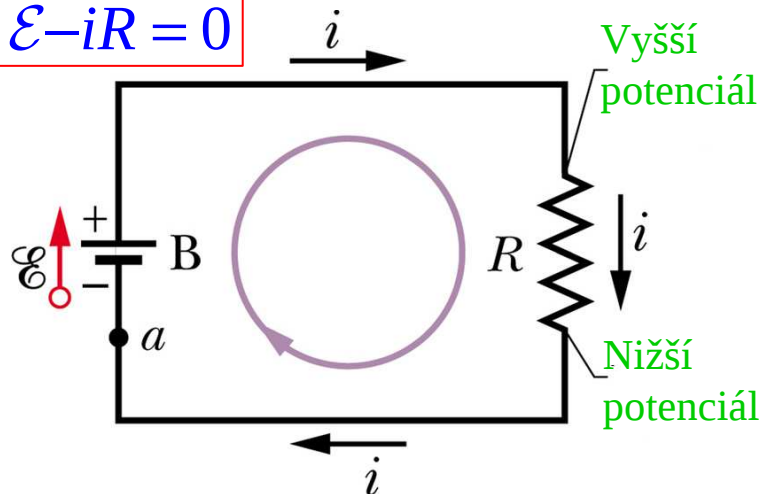
Pravidlo 2.

Potenciálový rozdíl zdroje emf počítáme s kladným znaménkem, postupujeme-li skrze zdroj ve směru $(-) \rightarrow (+)$ to je ve směru emf šipky, při opačném postupu počítáme potenciálový rozdíl se znaménkem $-$.



Proud v jednoduchém elektrickém obvodu.

$$\mathcal{E} - iR = 0$$



Předpokládáme, že zdroj **emf** je ideální a vodiče mají zanedbatelný elektrický odpor. Protékající elektrický proud **i** je orientován ve směru chodu hodinových ručiček.

Z rovnice $P = Ri^2$ vyplývá, že za časový interval dt se určitá část energie daná vztahem $P = Ri^2 dt$ změní průchodem elektrickým odporem na teplo (disipuje na teplo).

Za ten samý časový interval dt proteče baterií elektrický náboj $dq = idt$. Baterie vynaloží na přenesení tohoto náboje práci:

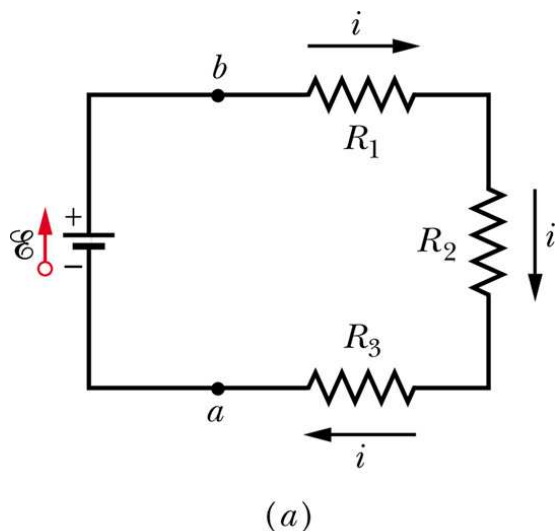
$$dW = \mathcal{E} dq = \mathcal{E} i dt$$

Za zákona zachování energie vyplývá, že tato práce se musí rovnat energii disipované na odporu:

$$\mathcal{E} i dt = Ri^2 dt \rightarrow \mathcal{E} = Ri \rightarrow \mathcal{E} - iR = 0$$

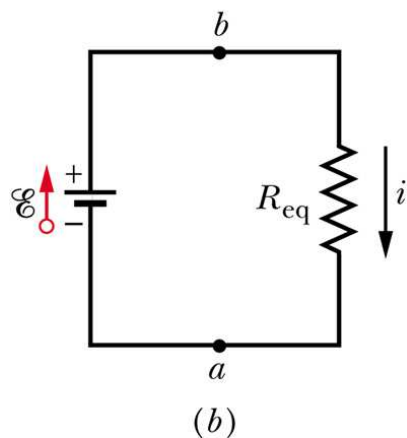
Elektrický proud protékající obvodem je pak roven: $i = \mathcal{E}/R$

Sériové zapojení rezistorů.



Jsou-li odpory v obvodu zapojeny v sérii (za sebou), pak všemi odpory protéká stejný elektrický proud. Součet všech úbytků napětí na zapojených odporech se musí rovnat potenciálovému rozdílu mezi svorkami *a-b* :

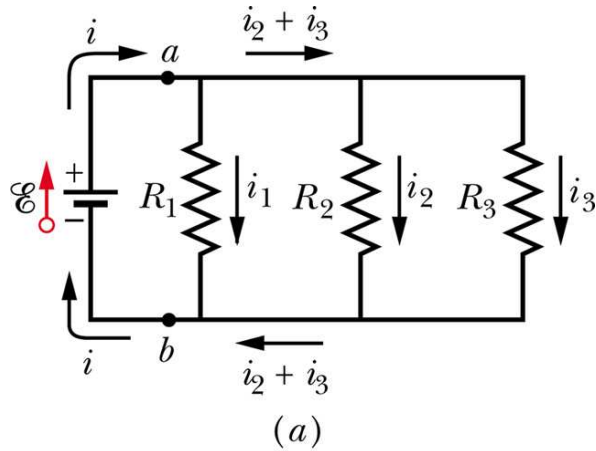
$$\mathcal{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0 \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$$



Odpory zapojené v sérii můžeme nahradit odporem ekvivalentním R_{eq} o velikosti rovné součtu všech odporů zapojených za sebou:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{l=1}^n R_l$$

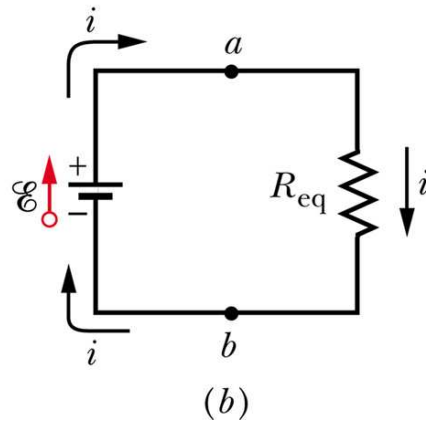
Paralelní zapojení rezistorů.



Jsou-li odpory v obvodu zapojeny paralelně (vedle sebe), pak na všech odporech je stejný potenciálový rozdíl, každým z odporů však protéká elektrický proud jehož velikost je závislá na velikosti odporu. Součet všech proudů v jednotlivých větvích zapojení musí být roven proudu naměřenému na svorkách zdroje:

$$i = i_1 + i_2 + i_3, \quad i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}, \quad i_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3} \rightarrow$$

$$i = \mathcal{E} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

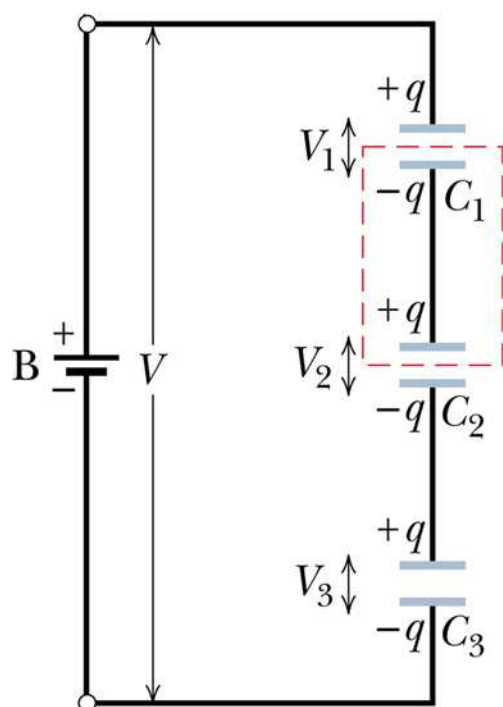


Všechny paralelně zapojené odpory můžeme nahradit jedním ekvivalentním odporem o velikosti dané vztahem:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Sériové zapojení kondensátorů.



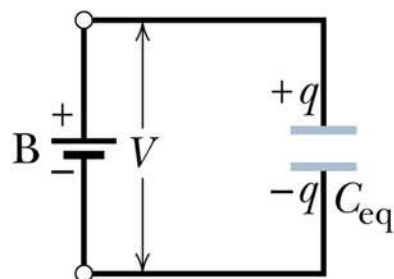
Sériově zapojené kondensátory připojené na zdroj mezi jehož svorkami je potenciálový rozdíl V nesou stejně velký náboj q . Na jednotlivých kondensátorech je však různý potenciál. Součet těchto potenciálů se musí rovnat napětí zdroje.

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Kapacita ekvivalentního kondensátoru C_{eq} :

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)} \rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$



Zobecnění pro n kondensátorů:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Paralelní zapojení kondensátorů.

Potenciálový rozdíl na svorkách kondensátorů je stejný, avšak náboje přivedené na jednotlivé kondensátory jsou různé. Jejich součet se však musí rovnat celkovému náboji přivedenému do obvodu.

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad q_3 = C_3 V$$

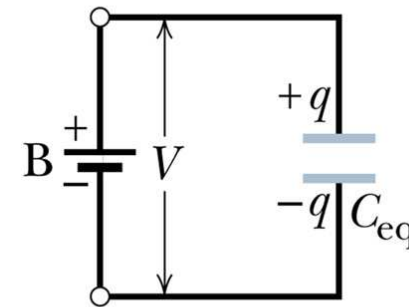
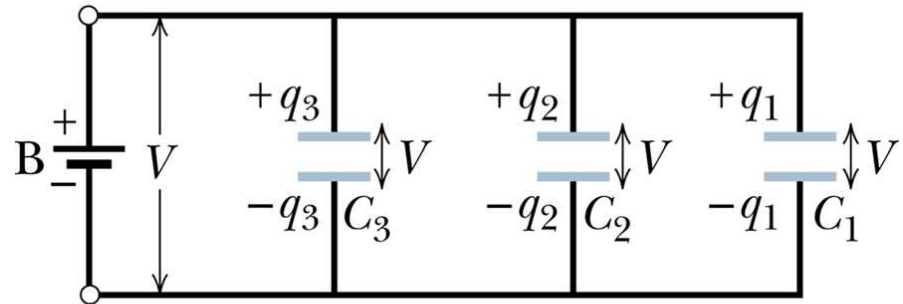
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

Paralelně zapojené kondensátory můžeme nahradit jediným kondensátorem (ekvivalentním kondensátorem), jehož kapacita je vztahem:

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

Obecně pro n paralelně zapojených kondensátorů:

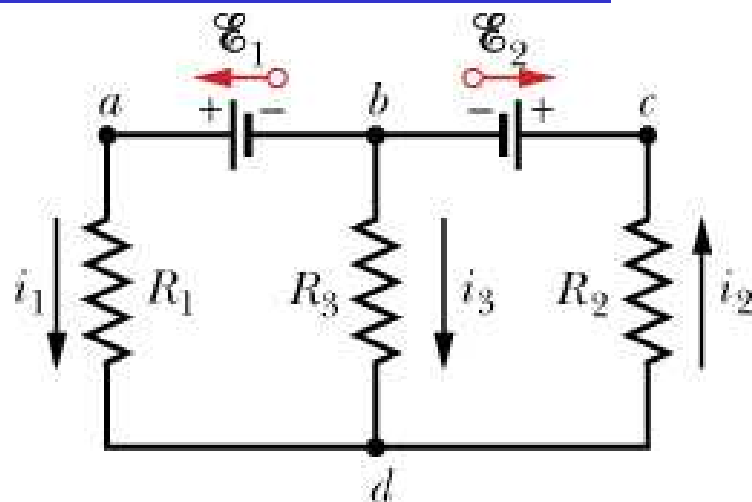
$$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n C_i$$



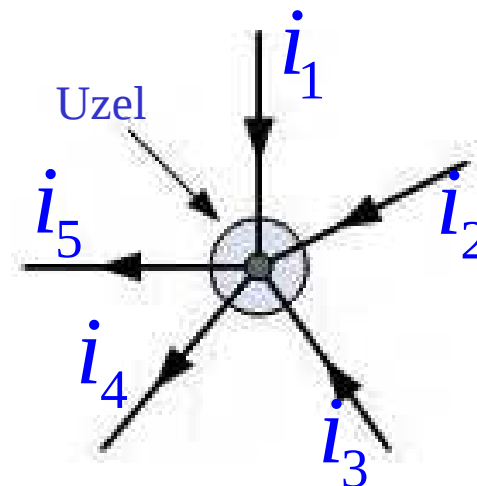
$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3$$

Kirchhoffovy zákony o obvodech.

1. Kirchhoffův zákon o uzlech.



$$i_1 + i_3 = i_2$$



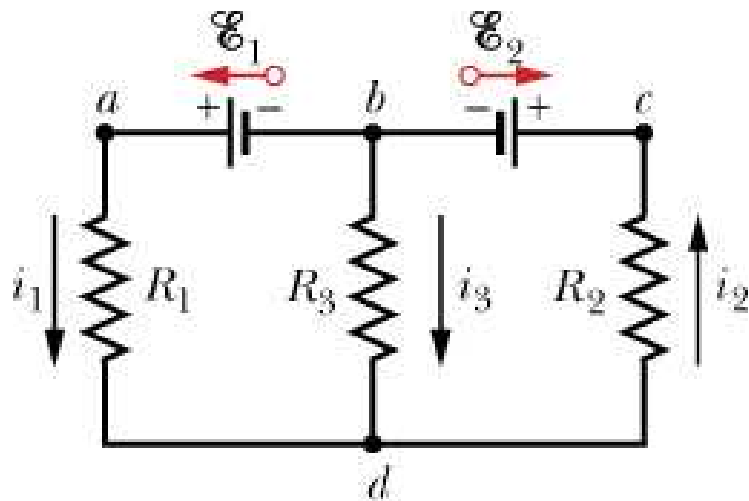
$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$$

Kirchhoffův zákon o uzlech říká, že součet všech elektrických proudů, které do vybraného uzlu v obvodu přiteče se musí rovnat součtu všech elektrických proudů, které z tohoto uzlu odtečou. Obecně:

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0$$

2. Kirchhoffův zákon o elektromotorických napětích.

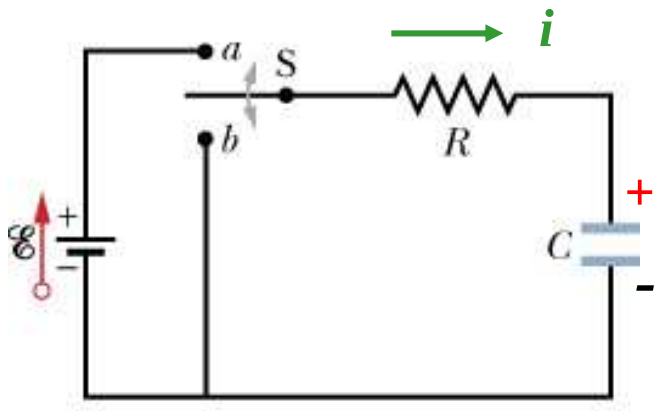
Součet úbytků napětí na všech spotřebičích se v uzavřené smyčce rovná součtu elektromotorických napětí zdrojů v této části obvodu.



$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 &= 0 \\ -i_3 R_3 - i_2 R_2 - \mathcal{E}_2 &= 0 \\ i_1 + i_3 &= i_2\end{aligned}$$

Při analýze obvodu je třeba vždy dbát na znaménka proudů a napětí. Tato znaménka se vztahují k směru postupu obvodovou smyčkou, vzhledem k tomuto směru pak započítáváme proudy jako kladné, jsou-li orientovány stejně jako je šipka určující směr postupu obvodem a záporně, je-li tomu naopak. Je-li směr postupu obvodem opačný než je orientace zdroje ($- \rightarrow +$), pak bereme napětí zdroje s opačným znaménkem.

Nabíjení a vybíjení kondensátoru – RC obvod.



Obvod je sestaven ze zdroje elektromotorického napětí, spínače, rezistoru a kondensátoru. Kondensátor na počátku nenese žádný elektrický náboj. Po zapnutí spínače, se začne postupně nabíjet až do okamžiku, kdy se napětí na kondensátoru rovná napětí zdroje.

Z druhého Kirchhoffova zákona pro uvedený obvod vyplývá rovnice:

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

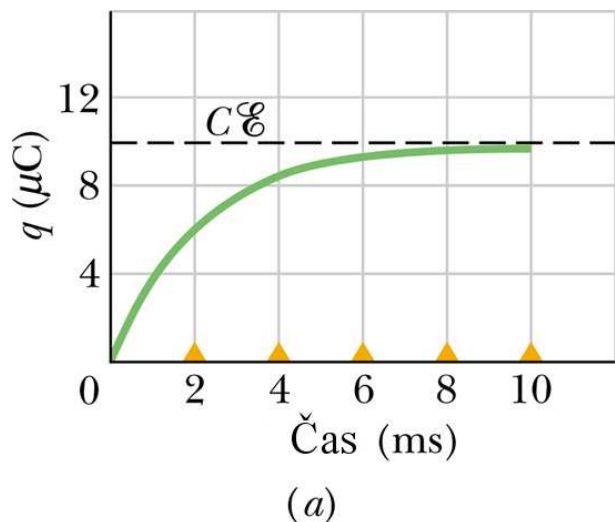
Proud protékající obvodem při nabíjení je dán vztahem: $i = \frac{dq}{dt}$

Po dosazení dostaneme rovnici: $\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$

Řešení této rovnice:

$$q = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nabíjení a vybíjení kondensátoru – RC obvod.



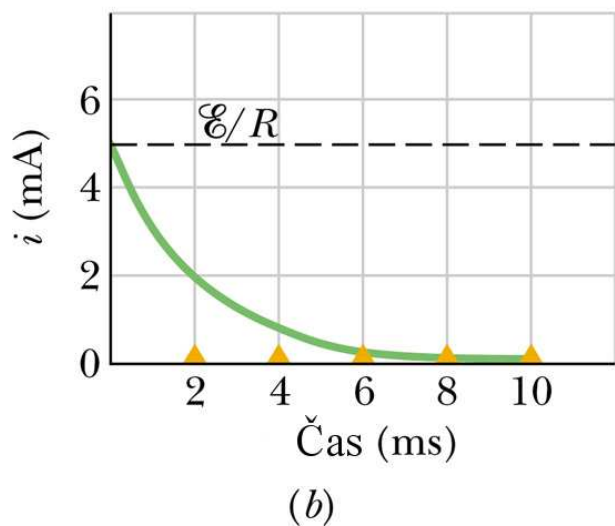
Diferenciální rovnice nabíjení kondensátoru:

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = \varepsilon$$

Řešení rovnice

$$q = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

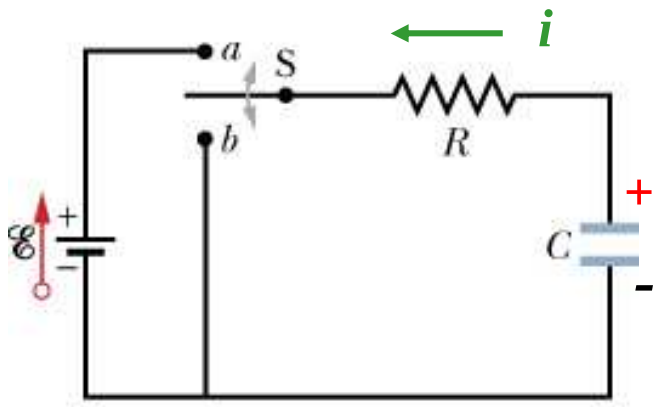
$$i = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$



Součin $\tau = RC$ označujeme jako časovou konstantu RC obvodu.

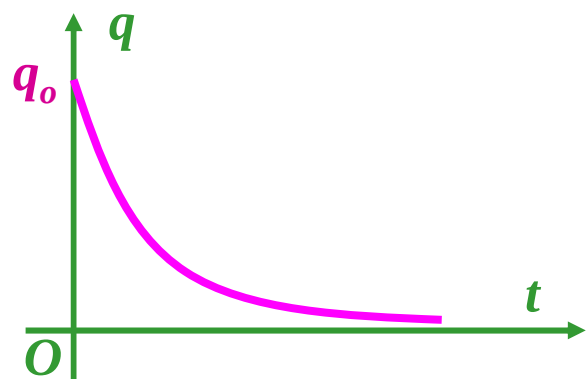
Pro časovou konstantu platí:

$$q = C\varepsilon \left(1 - e^{-1}\right) = 0,63C\varepsilon$$



Diferenciální rovnice pro vybíjení nabitého kondensátoru je rovnicí bez pravé strany. To znamená, že elektromotorické napětí, které vystupovalo na pravé straně rovnice v případě nabíjení kondensátoru položím rovno nule, kondensátor je nabit a je odpojen od zdroje. Kondensátor nese na počátku náboj q_0 .

$$\frac{dq}{dt} R + \frac{q}{C} = 0$$

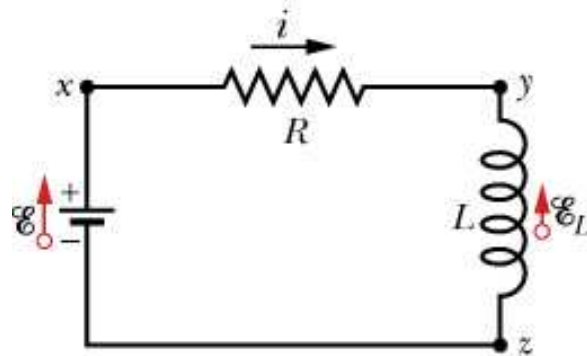
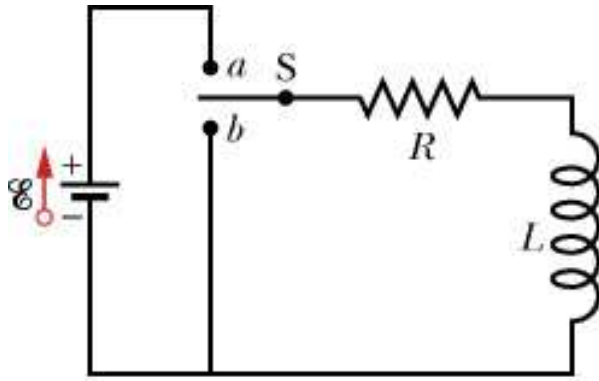


Řešení rovnice

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

RL - obvod.



Elektrický obvod sestává ze zdroje **emf.** , spínače **S**, rezistoru **R** a indukčnosti **L**. K určení závislosti elektrického proudu v **RL** obvodu na čase vyjdeme opět z druhého Kirchhoffova zákona:

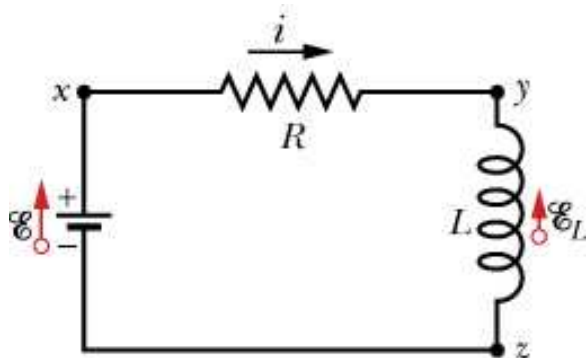
$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0 \rightarrow L \frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}$$

Řešením této rovnice splňující počáteční podmínku $i(0) = 0$ je:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Časová konstanta τ **RL** obvodu je dána vztahem:

$$\tau = \frac{L}{R}$$



RL - obvod.

Proud protékající **RL** obvodem je dán vztahem:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

S časovou konstantou τ : $\tau = \frac{L}{R}$

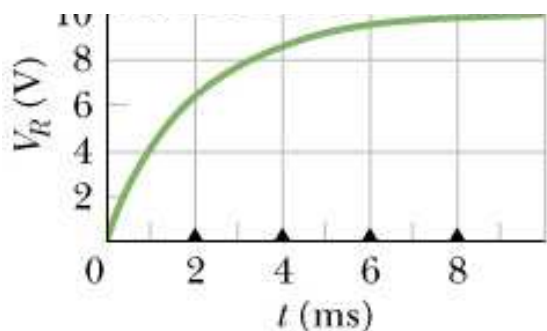
Časový průběh napětí na rezistoru R :

$$V_R = iR = \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

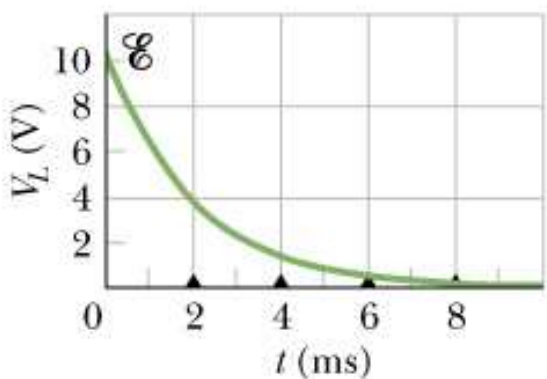
Časový průběh napětí na indukci L :

$$V_L = L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} e^{-t/\tau}$$

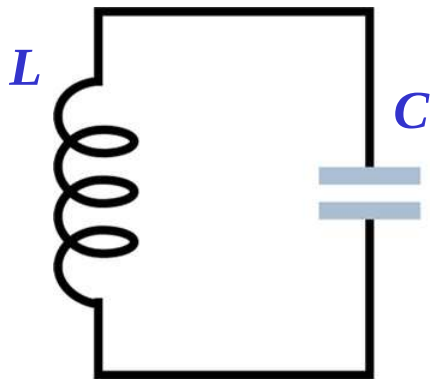
Časová konstanta τ určuje rychlost, s níž hodnota proudu dosáhne své limitní hodnoty ($\frac{\mathcal{E}}{R}$).



(a)



(b)



LC obvod.

Elektrický obvod sestává ze zdroje indukčnosti L , a kapacity C . Kapacita C je na počátku nabitá nábojem Q a vybíjí se přes indukčnost L .

Celková energie U v obvodu je dána součtem energie uložené v elektrickém poli kondensátoru U_E a v magnetickém poli indukčnosti U_B :

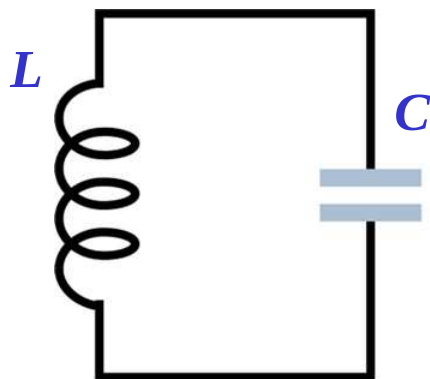
$$U = U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$$

Celková energie U se s časem nemění: $\frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0$

Dosazením za elektrický proud ze vztahu: $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Získáme diferenciální rovnici popisující oscilace v LC obvodu:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$$



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC} \right) q = 0 \quad (1)$$

Rovnice (1) je diferenciální rovnicí druhého řádu, má tvar rovnice jednoduchých harmonických kmitů:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

Řešením rovnice harmonických kmitů je funkce: $x(t) = X \cos(\omega t + \phi)$

Srovnáním rovnic (1) a (2) můžeme pro řešení rovnice LC obvodu psát

(3)

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \phi)$$

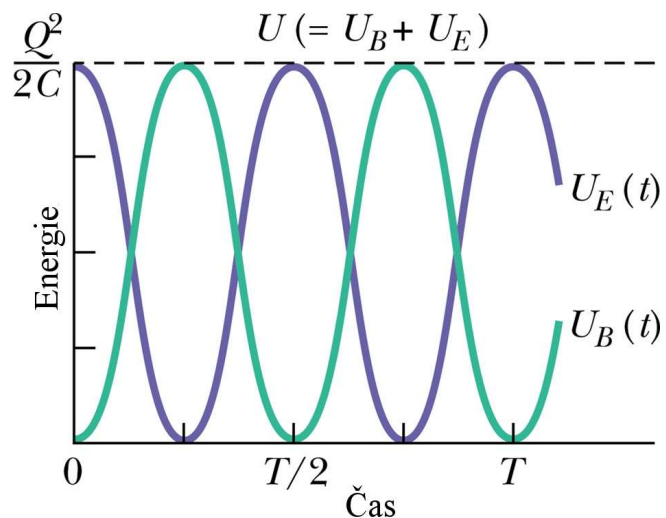
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Q je amplituda náboje a ω je úhlová frekvence kmitů v LC obvodu.

Derivací rovnice (3) získáme výraz pro oscilace elektrického proudu v LC obvodu:

$$i = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$$

Součin: $I = \omega Q$ je amplitudou elektrického proudu.



Energie v LC obvodu .

Elektrická energie uložená v kapacitě C čase t v LC obvodu:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi)$$

Magnetická energie uložená v pole indukčnosti L v čase t v LC obvodu:

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega^2 Q^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi)$$

Celková energie v LC obvodu:

$$U = U_E + U_B$$

Celková energie v LC obvodu je konstantní:

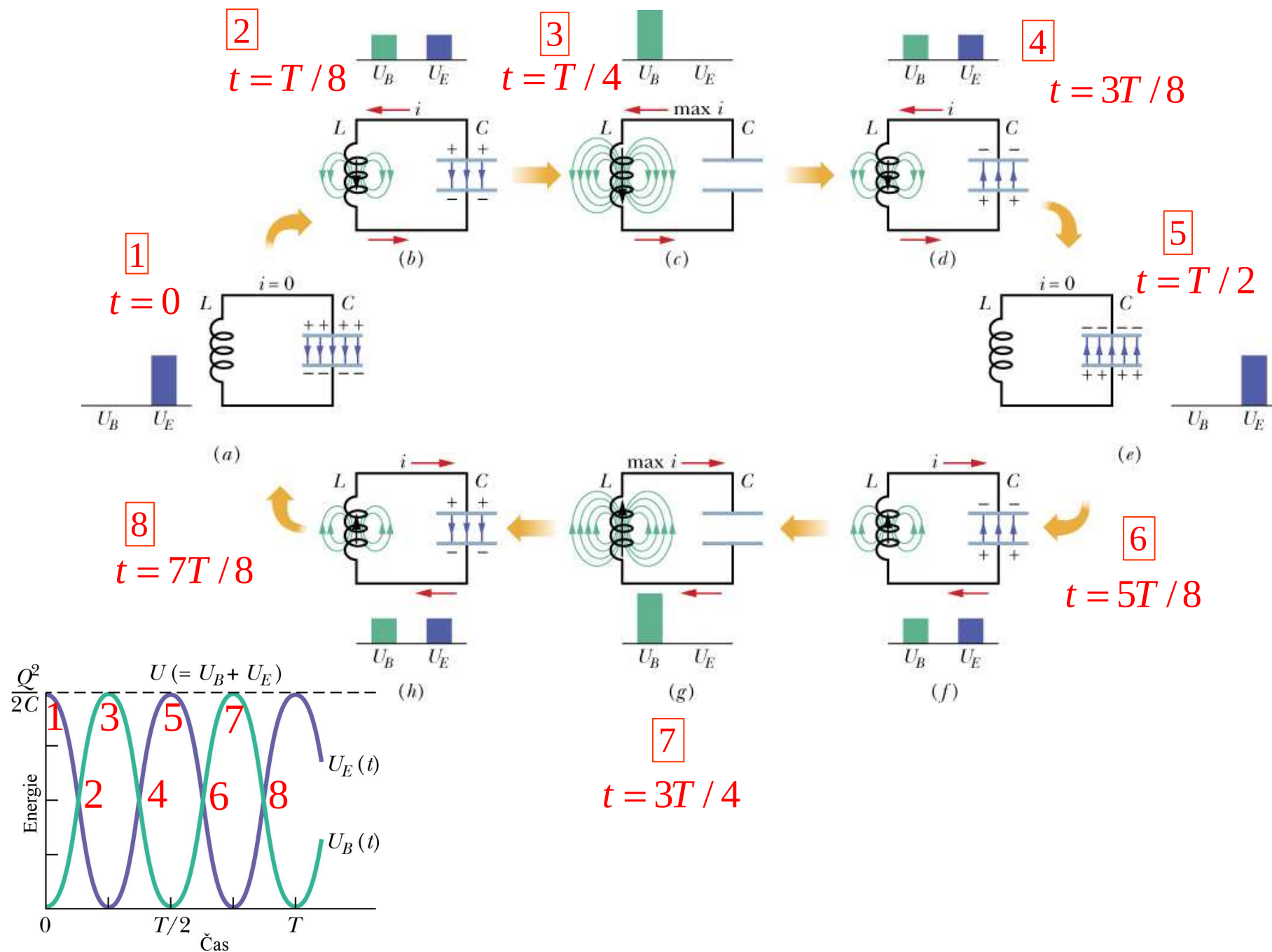
$$U = \left(\frac{Q^2}{2C} \right) [\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{Q^2}{2C}$$

Maxima elektrické energie nastanou:

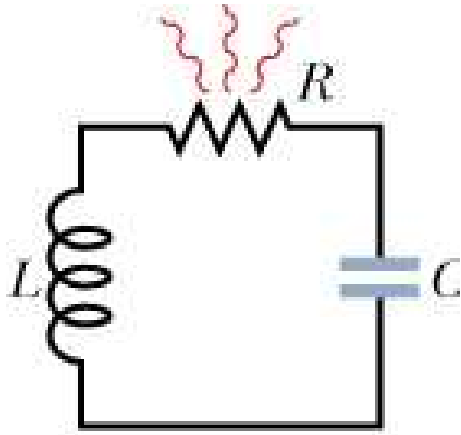
$$t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$$

Maxima magnetické energie nastanou:

$$t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$$



Tlumené kmity v RLC obvodu.



Elektrický obvod v němž je kromě indukčnosti L , a kapacity C zapojen rezistor R nazýváme RLC obvodem. Celková energie U v RLC obvodu již není konstantní, na rezistoru dochází k její disipaci na teplo. Elektrické kmity v RLC obvodu jsou díky ztrátě energie tlumené. Celková energie U :

$$U = U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2}$$

Rychlost úbytku energie na rezistoru se musí rovnat tepelné energii ztracené na rezistoru R :

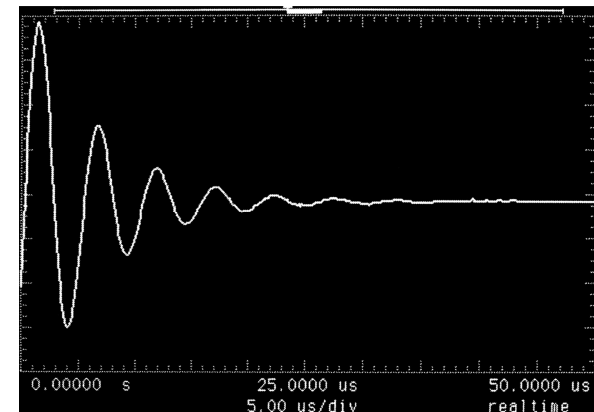
$$\frac{dU}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = -i^2 R$$

Po dosazením vztahů: $i = \frac{dq}{dt}$, $\frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$

získáme rovnici elektrických kmitů

RLC obvodu:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$



Rovnice tlumených elektrických kmitů v RLC obvodu:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

Řešením rovnice tlumených kmitů harmonického oscilátoru $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$

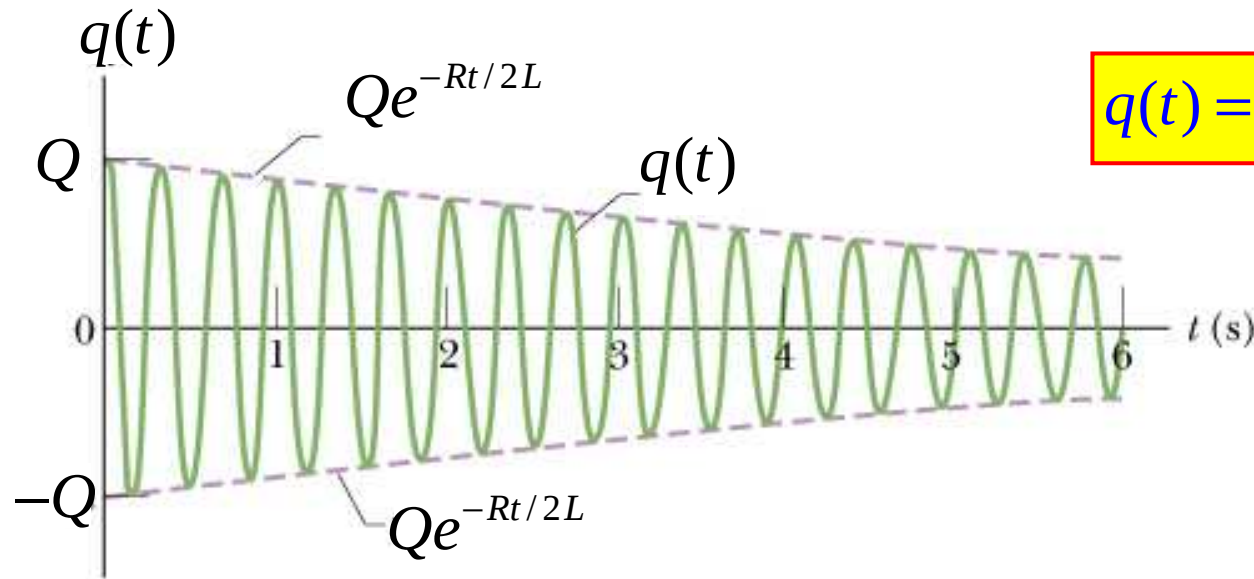
je vztah $x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi)$, kde ω' je kruhová frekvence kmitů..

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Ze srovnání s řešením tlumených kmitů harmonického oscilátoru pak můžeme analogicky psát řešení rovnice tlumených kmitů RLC obvodu:

$$q(t) = Q e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



$$q(t) = Qe^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Rovnice $q(t) = Qe^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi)$ je rovnicí tlumeného harmonického kmitu, s exponenciálně klesající amplitudou:

$$Qe^{-Rt/2L}$$

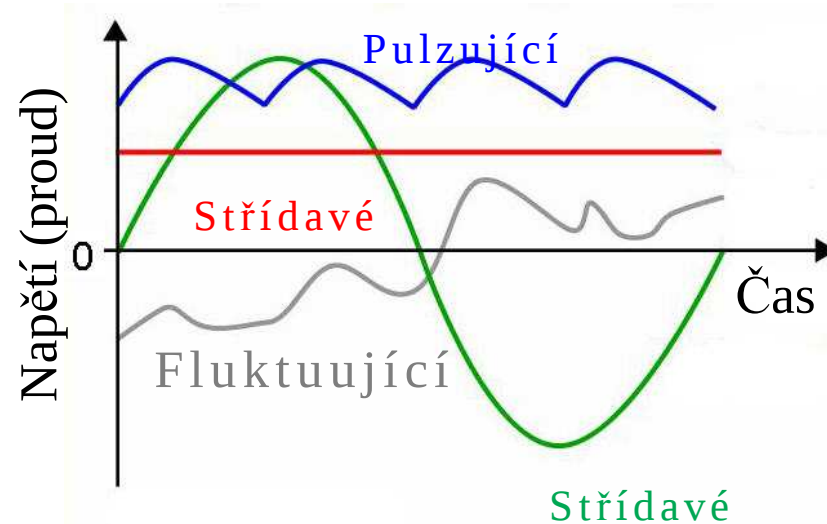
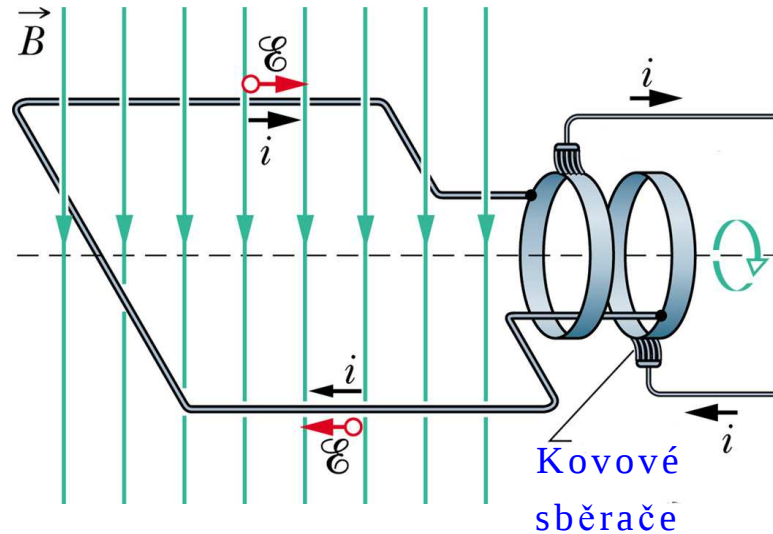
Kruhová frekvence tlumeného oscilátoru je vždy menší než netlumeného oscilátoru

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} < \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega$$

Platí-li nerovnost: $\frac{R^2}{4L^2} \ll \frac{1}{LC}$ pak můžeme použít aproximaci: $\omega' \approx \omega$

Tedy velikost rezistoru R je výrazně menší než indukčnost L .

Střídavé elektrické napětí a proud.



Časový průběh střídavého elektrického napětí (proudu):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

Kde, ω je kruhová frekvence, N je počet smyček, A je plocha smyčky a B je magnetická indukce pole.

$$\mathcal{E}_m = \omega N A B$$

V uzavřeném obvodu vyvolá střídavá emf. Střídavý elektrický proud i té samé kruhové frekvence ω .

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

Střídavý proud značíme **AC – alternating current**, stejnosměrný pak **DC – direct current**.

Elektrická síť v **ČR**: napětí v síti je 220 V AC, frekvence ω 50 Hz.

Rezistor, kapacita a indukčnost v obvodu střídavého proudu a napětí.

Úmluva o značení veličin.

Okamžité hodnoty **ac** veličin budeme označovat odpovídajícími malými písmeny abecedy.

Amplitudy **ac** veličin pak budeme značit odpovídajícími velkými písmeny abecedy.

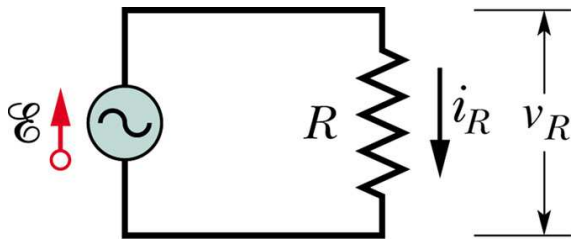
Příklad.

Elektrický náboj na kondensátoru v **LC** obvodu je dán vztahem:

$$q = Q \cos(\omega t + \phi)$$

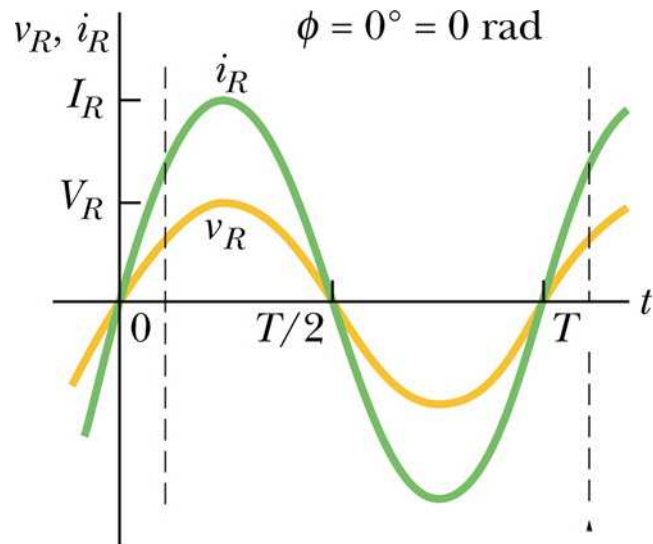
Q značí konstantní hodnotu amplitudy náboje, **q** je okamžitá hodnota elektrického náboje na kondensátoru.

Rezistor v obvodu střídavého proudu.



Z II. Kirchhoffova zákona o obvodech vyplývá pro obvod sestavený ze zdroje střídavého emf. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin(\omega t)$ a rezistoru R rovnice:

$$\mathcal{E} - i_R R = 0 \rightarrow i_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin \omega t$$



Amplituda proudu: $I_R = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$

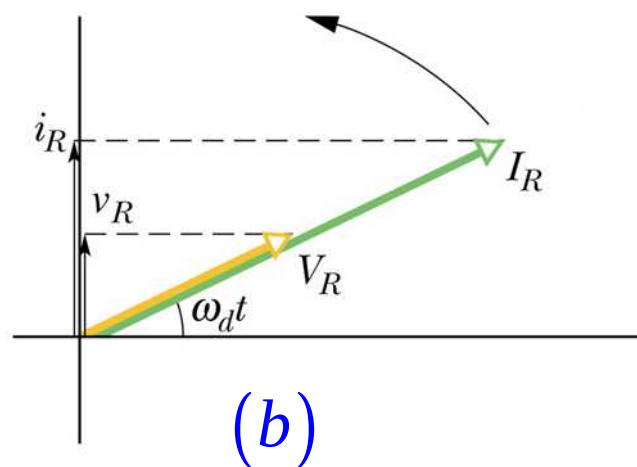
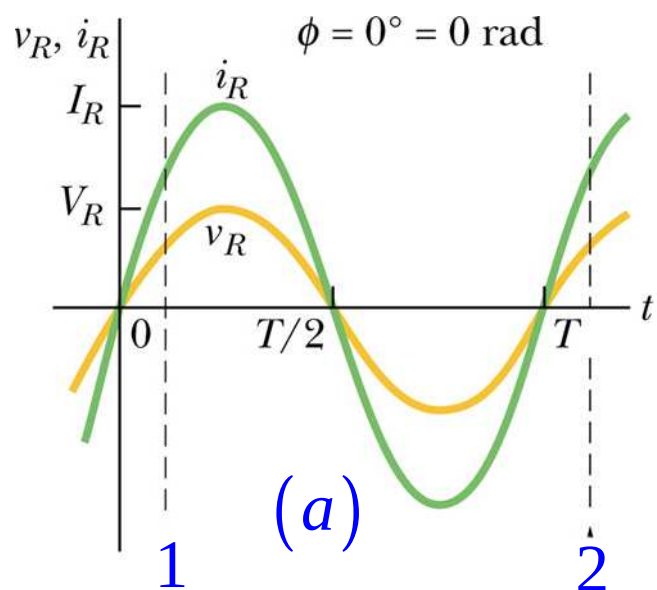
Napětí na odporu: $v_R = \mathcal{E}_m \sin \omega t$

Amplituda napětí na odporu je $\mathcal{E}_m$.

Mezi amplitudami je vztah: $V_R = I_R R$

Napětí na odporu a protékající proud dosahují svých maximálních hodnot ve stejném okamžiku, říkáme, že proud odporem a napětí na odporu v obvodu střídavého proudu jsou ve fázi.

Vztahy mezi veličinami v obvodech střídavého proudu lze velmi názorně popsat pomocí **fázorů**.



Napětí na rezistoru v_R a proud rezistorem i_R je representován rotujícím vektorem – **fázorem**. Počáteční bod fázoru leží v počátku souřadné soustavy.

Velikosti fázoru je rovna amplitudě ac veličiny, amplitudy V_R a I_R .

Fázor se otáčí okolo počátku proti směru hodinových ručiček s úhlovou rychlostí ω .

Průmět fázoru do osy y je roven okamžité hodnotě veličiny, napětí v_R a proud rezistorem i_R .

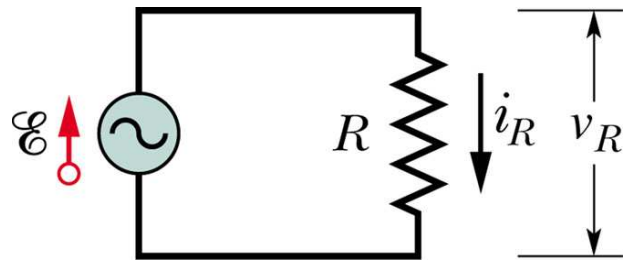
Úhel rotace ωt fázoru je roven fázi ac veličiny v čase t .

Fázory na obrázku (b) zobrazují napětí a proud v okamžicích 1 a 2 z obrázku (a).

Výkon střídavého proudu v obvodu s rezistorem.

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R}$$

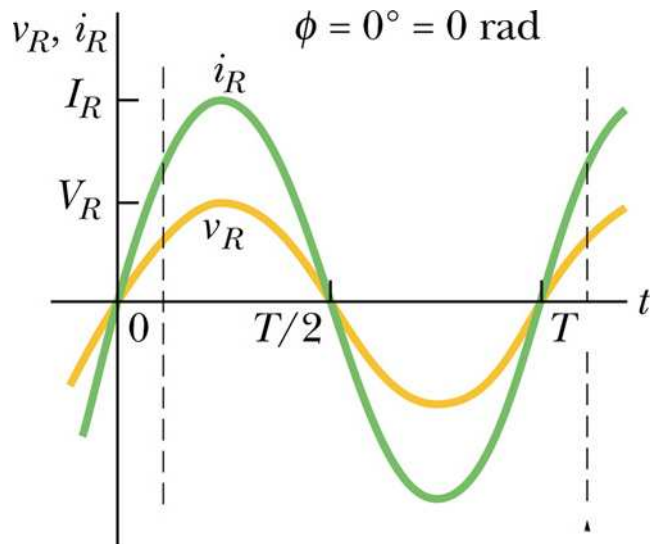
$$V_{\text{rms}} \equiv \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$



$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad P = \frac{\mathcal{E}_m^2}{R} \sin^2 \omega t \rightarrow$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R}$$

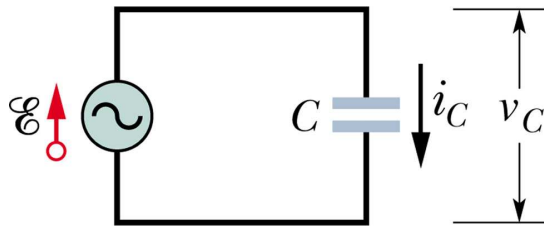


K výpočtu výkonu disipovaného na rezistoru je třeba počítat namísto střední hodnoty proudu (napětí) se středními kvadratickými hodnotami (**rms** hodnotami **root mean square**), nebo-li **efektivními hodnotami** proudu (napětí),. Pak pro disipovaný výkon platí vztah:

$$V_{\text{rms}} \equiv \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$$

V_{rms} dává stejný disipovaný výkon jako stejnosměrné napětí o stejné hodnotě.

Kapacita v obvodu střídavého proudu.



Z II. Kirchhoffova zákona vyplývá pro obvod sestavený ze zdroje střídavého emf. $\varepsilon = \varepsilon_m \sin(\omega t)$ a kapacity C vztah:

$$\varepsilon - \frac{q_C}{C} = 0 \rightarrow q_C = \varepsilon C = \varepsilon_m C \sin \omega t$$

Pro proud i_C platí:

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \varepsilon_m C \omega \cos \omega t = \varepsilon_m C \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Amplituda napětí V_C je φ_C , amplituda proudu I_C je rovna:

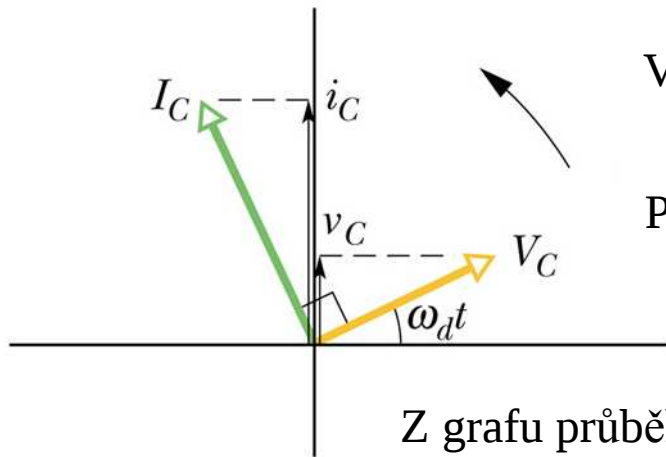
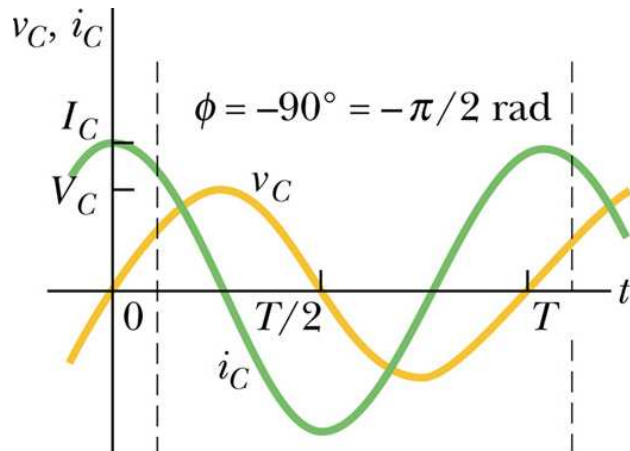
$$I_C = \omega C V_C = \frac{V_C}{1/\omega C} = \frac{V_C}{X_C}$$

Veličinu X_C nazýváme kapacitance:

$$X_C = 1/\omega C$$

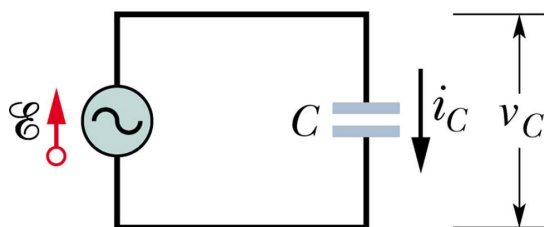
Proud protékající obvodem:

$$i_C = I_C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

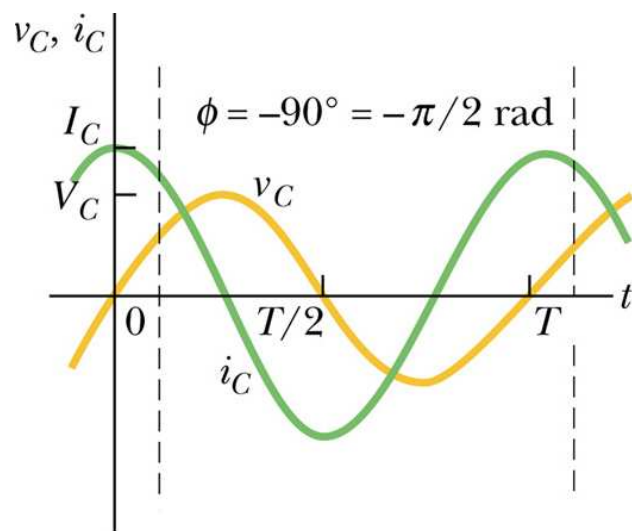


Z grafu průběhu proudu a napětí v čase a z fázorového diagramu vyplývá, že proud **předchází** napětí, fázový rozdíl mezi proudem a napětím je $\pi/2$.

Výkon střídavého proudu v obvodu s kapacitou.



$$P = V_C I_C = \frac{\mathcal{E}_m^2}{X_C} \sin \omega t \cos \omega t$$

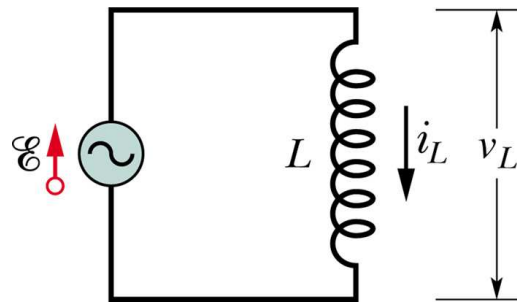


$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \quad \rightarrow \quad P = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2X_C} \sin 2\omega t$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2X_C} \frac{1}{T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

Na **kapacitě** v obvodu střídavého proudu **nedochází k disipaci energie**. Kapacita sice nejprve výkon získá z ac. zdroje, aby ho pak následně vrátila zpět.

Indukčnost v obvodu střídavého proudu.



Z II. Kirchhoffova zákona vyplývá pro obvod sestavený ze zdroje střídavého napětí $\mathcal{E}$ a rezistoru kapacity C vztah:

$$\mathcal{E} - L \frac{di_L}{dt} = 0 \rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \sin \omega t$$

$$i_L = \int di_L = \int \frac{\mathcal{E}_m}{L} \sin \omega t dt =$$

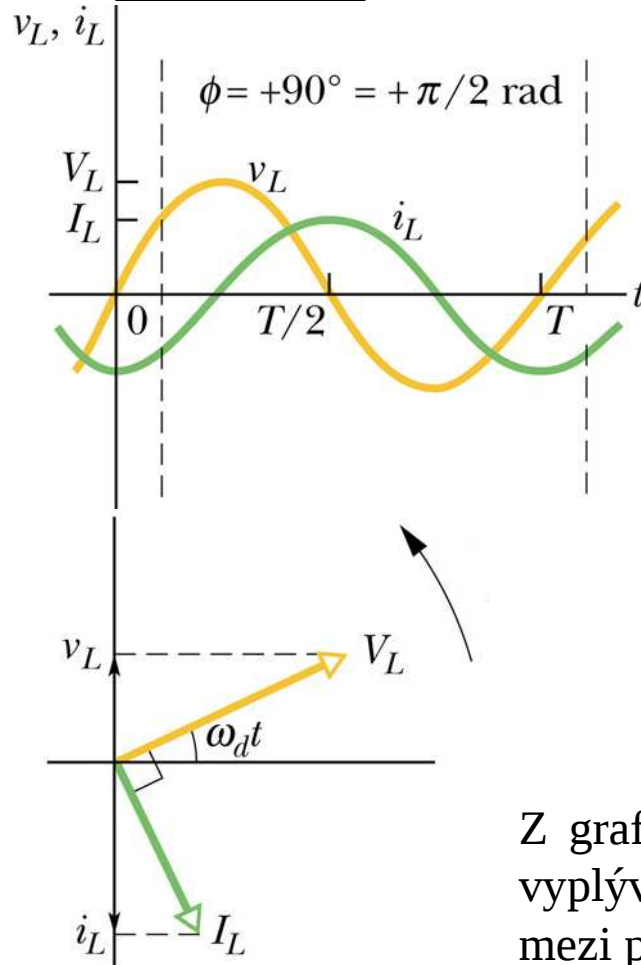
$$= -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \cos \omega t dt \rightarrow i_L = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Veličinu ωL nazýváme induktance X_L . $X_L = \omega L$

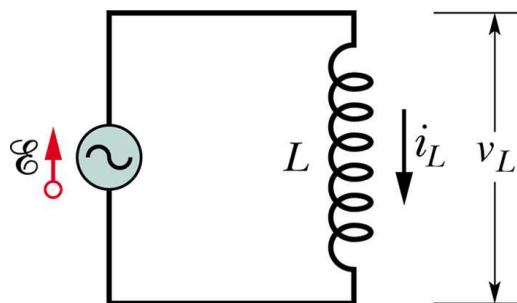
Pro amplitudy platí: $V_L = I_L X_L$

Proud indukčnosti: $i_L = I_L \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$

Z grafu průběhu proudu a napětí v čase a z fázorového diagramu vyplývá, že proud indukčnosti se opoždí za napětím, fázový rozdíl mezi proudem a napětím je $-\pi/2$.



Výkon střídavého proudu v obvodu s indukčností.

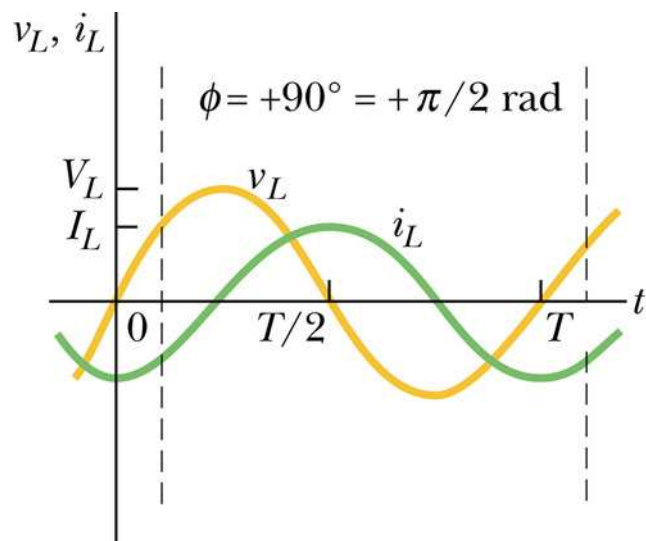


$$P = V_L I_L = -\frac{\mathcal{E}_m^2}{X_L} \sin \omega t \cos \omega t$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \rightarrow P = -\frac{\mathcal{E}_m^2}{2X_L} \sin 2\omega t$$

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = -\frac{\mathcal{E}_m^2}{2X_L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

$$\boxed{\langle P_L \rangle = 0}$$

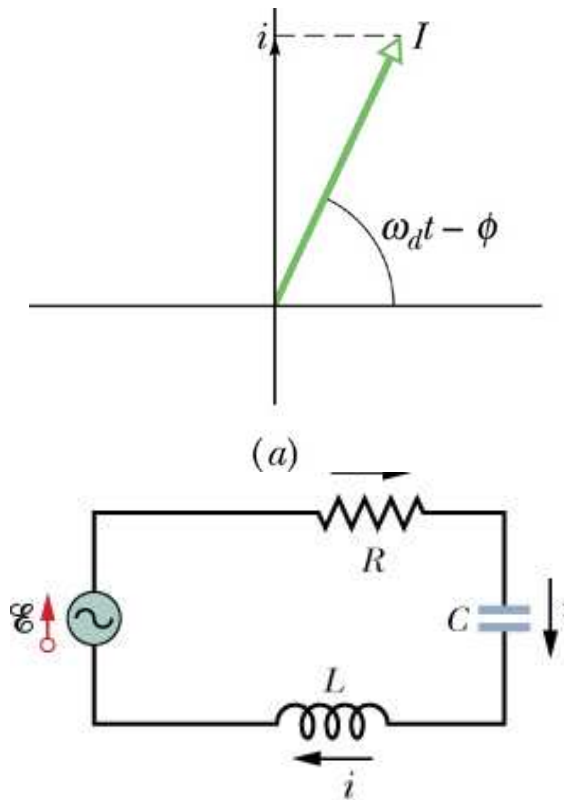


V obvodu střídavého proudu s indukčností nedochází k disipaci energie. Indukčnost sice nejprve nějakou energii z ac. zdroje získá, ale pak ji následně vrátí zpět.

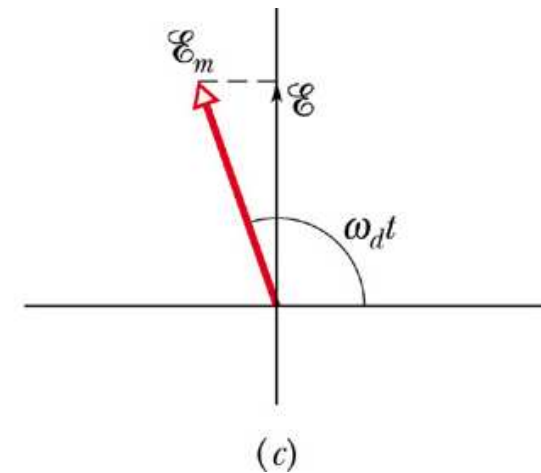
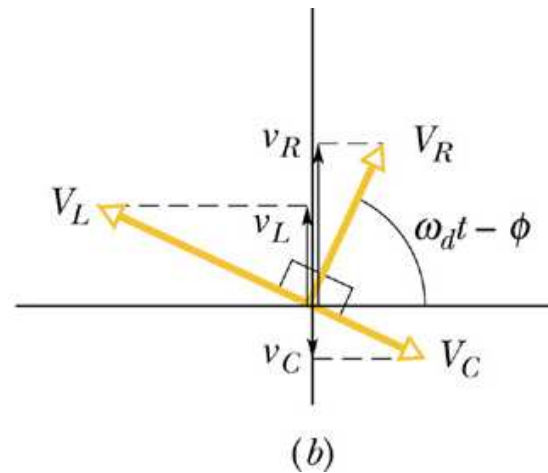
Shrnutí.

Prvek obvodu	Disipovaná energie	Reactance	Fáze proudu	Amplituda napětí
Resistor R	$\langle P_R \rangle = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R}$	R	Proud je ve fázi s napětím	$V_R = I_R R$
Kapacita C	$\langle P_C \rangle = 0$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	Proud předchází napětí o čtvrt periody	$V_C = I_C X_C = \frac{I_C}{\omega C}$
Indukčnost L	$\langle P_L \rangle = 0$	$X_L = \omega L$	Napětí předchází proud o čtvrt periody	$V_L = I_L X_L = I_L \omega L$

Sériový RLC obvod.

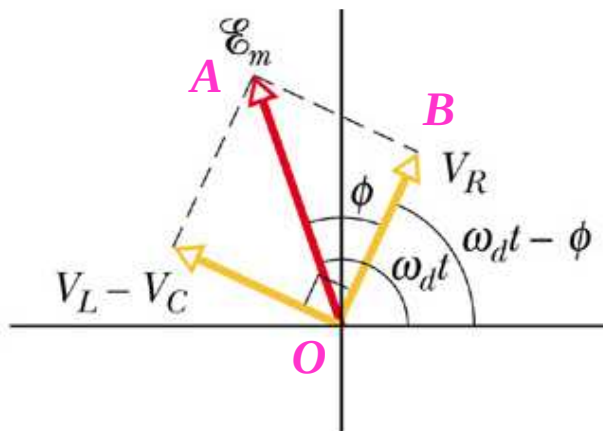
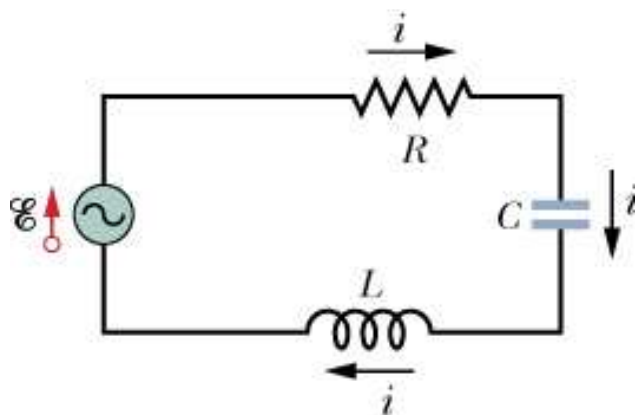


$$i = I \sin(\omega t - \phi)$$



AC. zdroj dodává do obvodu v němž jsou zapojeny sériově rezistor, kapacita a indukčnost napětí $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$. Fázor ac. emf je vynesena na obrázku (c). Proud obvodem je dán vztahem $i = I \sin(\omega t - \phi)$. Fázor proudu je vynesena na obrázku (a).

Fázory napětí na rezistoru V_R , kapacitě V_C a indukčnosti V_L jsou vyneseny v diagramu na obrázku (b).



$$i = I \sin(\omega t - \phi)$$

Z druhého Kirchhoffova zákona **RLC** obvodu vyplývá: $\mathcal{E} = v_R + v_C + v_L$

Fázory V_L a V_C mají opačná znaménka, nahradíme je jediným fázorem $(V_L - V_C)$. Z trojúhelníku **OAB** pak pro amplitudy dostaneme:

$$\mathcal{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 = I^2 \left[R^2 + (X_L - X_C)^2 \right] \rightarrow$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \text{ jmenovatel ve zlomku nazýváme impedance obvodu } Z.$$

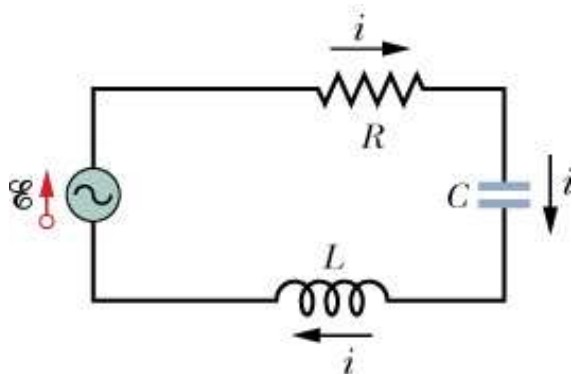
Vztah pro proud **RLC** obvodem pak přepíšeme:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}$$

Dosazením za reaktanci rezistoru, induktanci a kapacitanci dostaneme vztah mezi amplitudami:

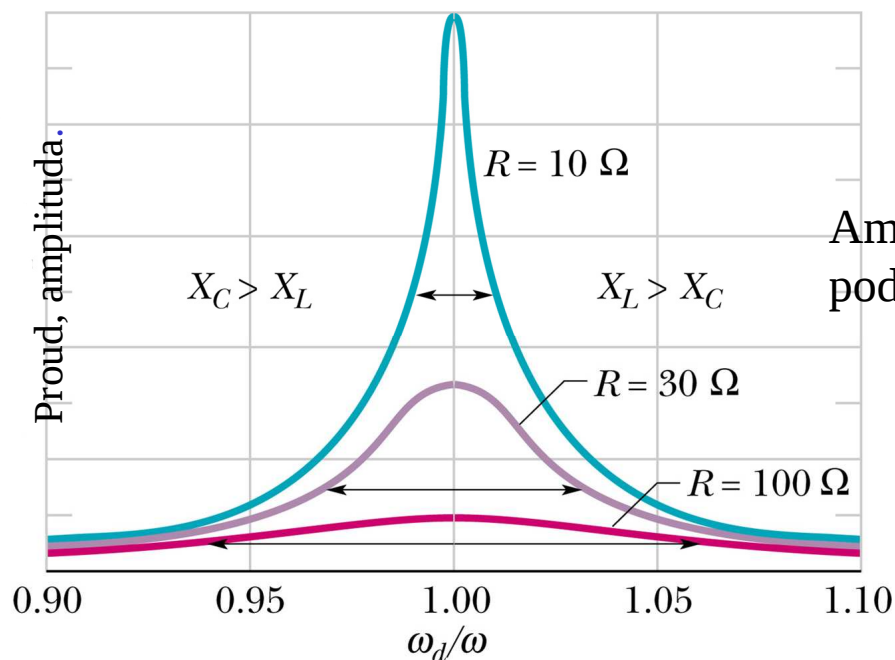
$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Rezonance ve střídavém obvodu RLC.



Předpokládejme, že úhlová frekvence střídavého napětí dodávaného ac generátorem je proměnná. Závislost amplitudy proudu I sériovým RLC obvodem na kruhové frekvenci střídavého napětí je dána vztahem:

$$I = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



Amplituda proudu je maximální při splnění podmínky:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

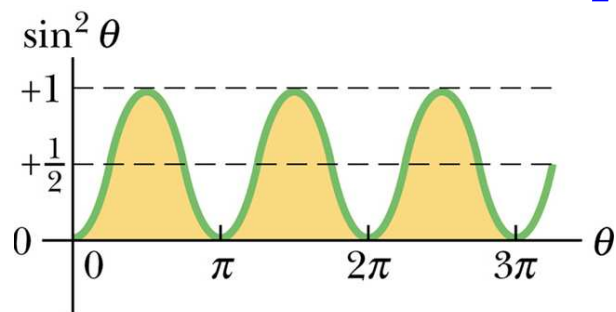
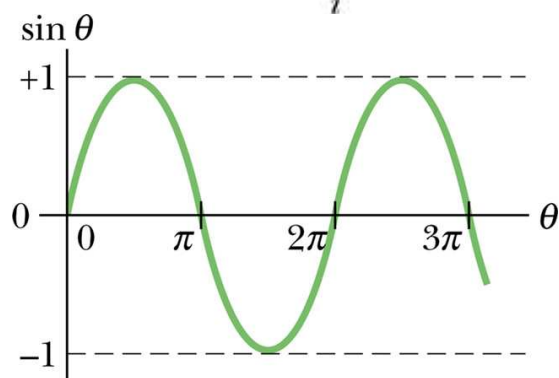
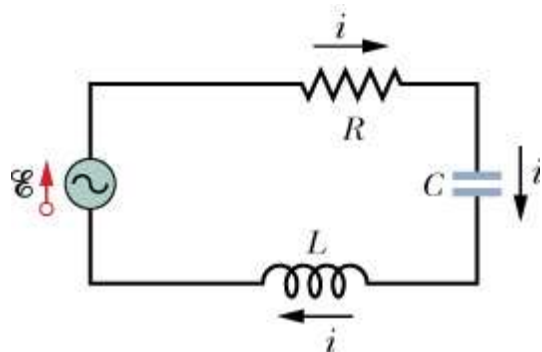
Tuto frekvenci nazýváme **rezonanční frekvencí**.

Pak platí pro amplitudy:

$$I_{\text{res}} = \frac{\varepsilon_m}{R}$$

Zobrazení závislosti amplitudy proudu (napětí) na kruhové frekvenci střídavého napětí (proudu) nazýváme **rezonanční křivkou**.

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$



Výkon v obvodu RLC.

V ustáleném stavu ($\omega = \text{konstanta}$) střídavého obvodu zůstává průměrná energie v kapacitoru a indukčnosti konstantní. Veškerá energie je disipována pouze na rezistoru R :

$$P = i^2 R = [I \sin(\omega t - \phi)]^2 R = I^2 R \sin^2(\omega t - \phi)$$

$$P_{\text{avg}} = I^2 R \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \phi) dt \right] = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 R = I_{\text{rms}}^2 R$$

Analogicky píšeme:

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$E_{\text{rms}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z}$$

Disipovaný výkon :

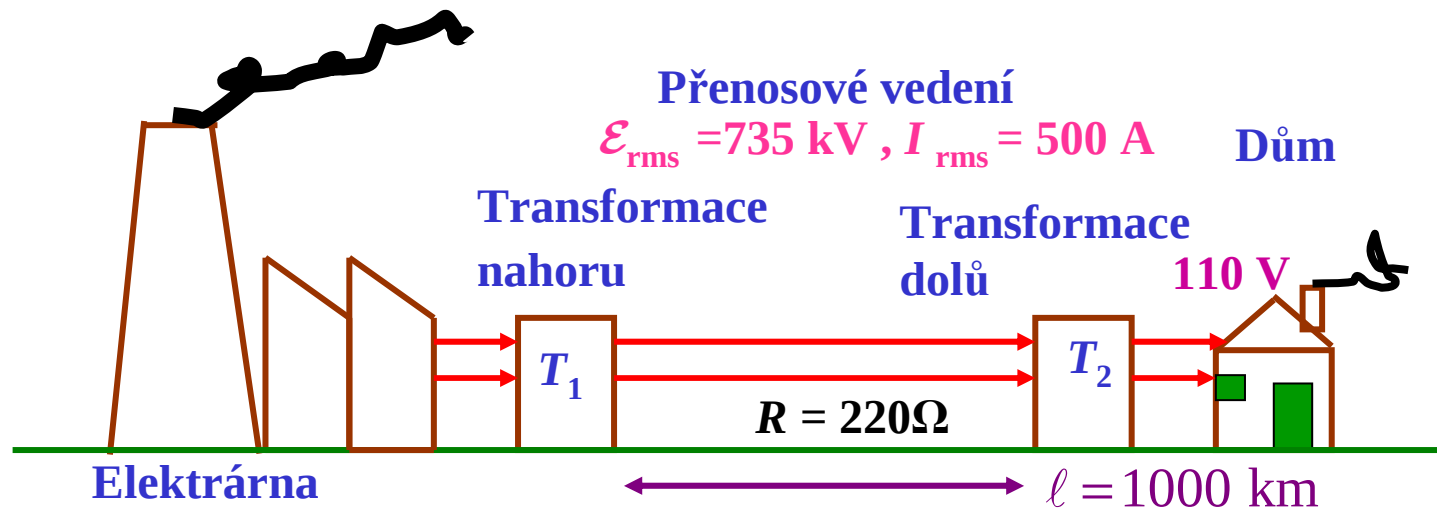
$$P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}} R I_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} R \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z} = I_{\text{rms}} \mathcal{E}_{\text{rms}} \frac{R}{Z} = I_{\text{rms}} \mathcal{E}_{\text{rms}} \cos \phi$$

$$P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}} \mathcal{E}_{\text{rms}} \cos \phi$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z}$$

nazýváme účinník.

Přenos elektrické energie.



Odpor elektrického rozvodu: $R = \frac{\rho \ell}{A}$ Předpokládejme 220Ω .

Tepelné ztráty v elektrickém rozvodu: $P_Q = I_{\text{rms}}^2 R$ Předpokládejme 55 MW .

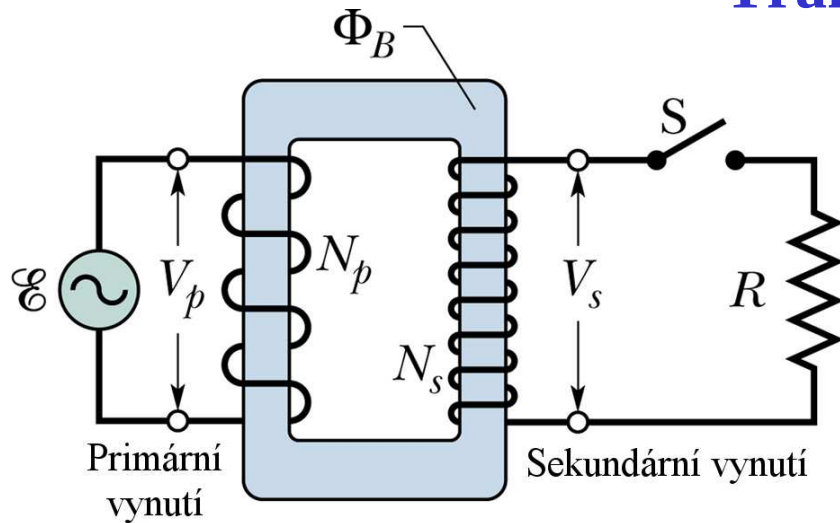
Přenášený výkon: $P_{\text{trans}} = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ Předpokládejme například 360 MW .

Tepelné ztráty tvoří přibližně 15% přenášeného výkonu, což je přijatelná ztráta.

Pro udržení ztráty energie při přenosu rozvodem na úrovni 15% je třeba držet I_{rms} co nejmenší.

Jediný možný způsob jak toto zajistit je dostatečně zvýšit rmd , v tomto případě $\text{rmd} = 735 \text{ kV}$. Jak?

Transformátor.



Transformátor je zařízení, které umožňuje přenášet elektrické napětí mezi dvěma obvody. Pracuje na principu elektromagnetické indukce. Sestává ze dvou cívek navinutých okolo společného železného jádra. Cívku k níž je připojen zdroj ac napětí nazýváme **primární vinutí**, výstup transformátoru pak **sekundární vinutí**.

Společné železné jádro zajišťuje přenos magnetického pole indukovaného elektrickým proudem z ac zdroje v připojeného k primárnímu vinutí.

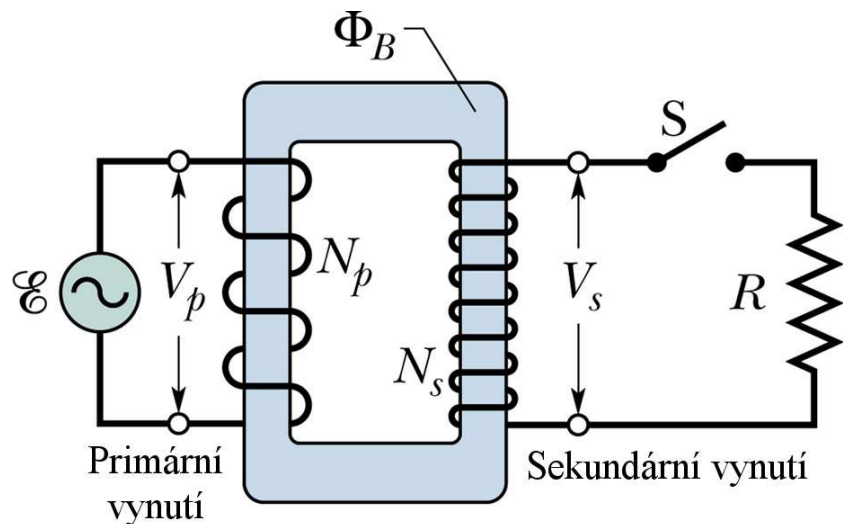
Magnetický tok primárním vinutí obsahujícím N_p smyček:

$$\Phi_p = N_p B A \rightarrow V_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -N_p A \frac{dB}{dt}$$

Magnetický tok sekundárním vinutí obsahujícím N_s smyček:

$$\Phi_s = N_s B A \rightarrow V_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -N_s A \frac{dB}{dt}$$

Kde V_p a V_s jsou napětí na primárním a sekundárním vinutí.



$$\Phi_P = N_P BA \rightarrow V_P = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -N_P A \frac{dB}{dt} \quad (1)$$

$$\Phi_S = N_S BA \rightarrow V_S = -\frac{d\Phi_S}{dt} = -N_S A \frac{dB}{dt} \quad (2)$$

Podělením rovnic (1) a (2) dostaneme:

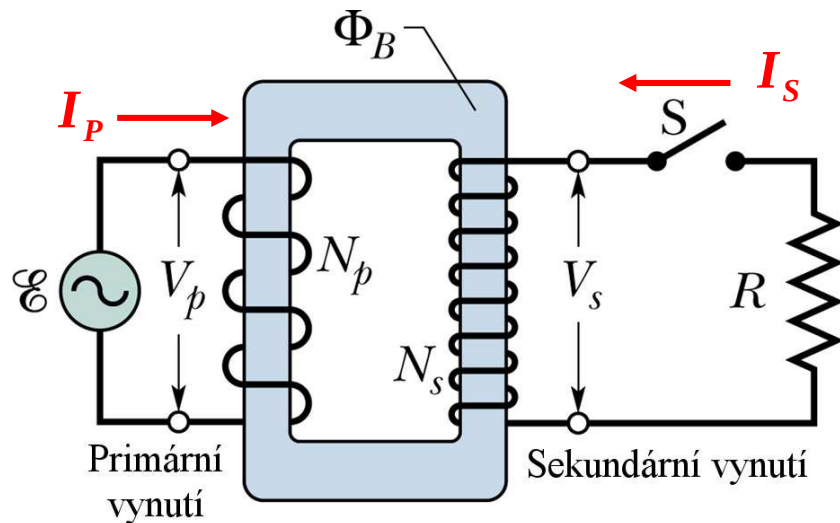
$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{-N_S A \frac{dB}{dt}}{-N_P A \frac{dB}{dt}} = \frac{N_S}{N_P} \rightarrow \frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P}.$$

Napětí na sekundárním vinutí:

$$V_S = V_P \frac{N_S}{N_P}$$

Platí-li: $N_S > N_P \rightarrow \frac{N_S}{N_P} > 1 \rightarrow V_S > V_P$ hovoříme o transformaci nahoru.

Platí-li: $N_S < N_P \rightarrow \frac{N_S}{N_P} < 1 \rightarrow V_S < V_P$ hovoříme o transformaci dolů.



$$\frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P}$$

$$I_S N_S = I_P N_P$$

$$\frac{V_S}{N_S} = \frac{V_P}{N_P} \rightarrow V_S N_P = V_P N_S \quad (1)$$

Primárním vynutím transformátoru prochází elektrický ac. proud I_P . Po sepnutí spínače S začne sekundárním obvodem protékat elektrický proud I_S . Předpokládejme, že transformátor je bezeztrátový, ze zákona zachování energie vyplývá rovnice:

$$V_P I_P = V_S I_S \quad (2)$$

Dosazením z rovnice (2) za V_S do rovnice (1) dostaneme vztah mezi proudem protékajícím primárním a sekundárním vynutím:

$$I_S = \frac{N_P}{N_S} I_P$$

Mezi proudem sekundárním a primárním vynutím a počty smyček v obou vinutích platí nerovnosti:

$$(N_S > N_P) \rightarrow I_S < I_P$$

$$(N_S < N_P) \rightarrow I_S > I_P$$

Proud I_S protéká primárním vynutím díky odporové zátěži R připojené v sekundárním vynutím.

Dosazením ze vztahů $I_S = \frac{V_S}{R}$ do rovnice $I_S = I_P \frac{N_P}{N_S}$

$$V_S = V_P \frac{N_S}{N_P}$$

Dostaneme rovnici vyjadřující proud primárním vynutím:

$$I_P = \frac{1}{R} \left(\frac{N_S}{N_P} \right)^2 V_P$$

Rovnice má tvar: $I_P = \frac{V_P}{R_{\text{ekv.}}}$, kde $R_{\text{ekv.}}$ má tvar:

$$R_{\text{ekv.}} = \left(\frac{N_P}{N_S} \right)^2 R \quad (1)$$

Z rovnice (1) vyplývá pro transformátor další funkce, tzv. impedanční přizpůsobení. Energie ze zdroje emf. se nejefektivněji přenáší, je-li impedance zdroje rovna impedanci zátěže. Máme-li zařízení, kde toto není splněno, pak zapojením transformátoru o vhodném poměru N_P / N_S dosáhneme tzv. **impedančního přizpůsobení** zdroje a odporové zátěže.