



Interference a ohyb světla.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Eugene Hecht, Optics 4th edition

Intensita světla.

Intensita světla definujeme (pro obecnou) elektromagnetickou vlnu jako časová střední hodnot velikosti Poyntingova vektoru $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$.

$$I(\vec{r}) = \langle \vec{S}(\vec{r},t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} S(\vec{r},t) dt$$
$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)$$
$$c(\vec{k} \times \vec{B}) = \vec{E}$$

Intensita světla je střední hodnotou hustoty výkonu dopadajícího na jednotkovou plochu kolmou na směr šíření elektromagnetické vlny.

Pro elektrické pole rovinné vlny vyjádřené v komplexním tvaru

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

kde jsme zavedli komplexní amplitudu: $\tilde{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 \exp(-i\varepsilon)$

pak z definice pro intensitu světla vyplývá vztah: $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left| \tilde{\vec{E}}_0 \right|^2$

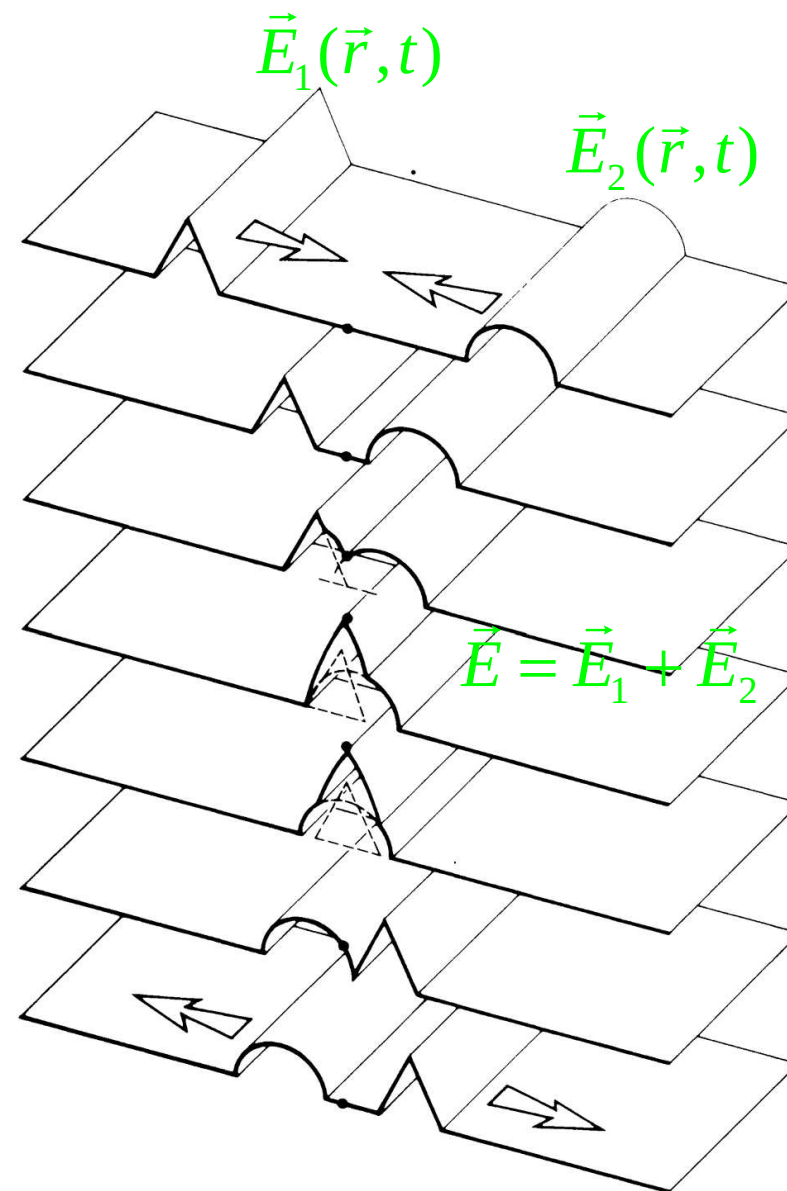
Princip superposice

Vlnová rovnice:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Řešením vlnové rovnice je též lineární kombinace vektorů n světelných vln:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{E}_i(\vec{r}, t)$$



Interference světla.

Z principu superposice vyplývá, že jsou-li dvě světelné vlny E_1 a E_2 řešením vlnové rovnice, pak je řešením též jejich součet $E_{12} = E_1 + E_2$. Detektory však zaznamenávají intenzitu světla a nikoliv amplitudy elektrických polí :

$$I(\vec{r}) = \left\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \right\rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{E}_{12}(\vec{r}, t) dt \rightarrow I(\vec{r}) = \varepsilon_0 c \left\langle \tilde{E}_{12}(\vec{r}, t) \right\rangle_T$$

Odpovídají-li světelným vlnám intenzity I_1 a I_2 , pak obecně **neplatí**, že intenzita superposice světelných vln bude rovna jejich součtu: $I = I_1 + I_2$.

V určitých místech bude intenzita větší než prostý součet, v jiných naopak bude téměř nulová. **Intenzita světelného pole bude prostorově modulovaná**. tento jev nazýváme **interference světla**.

Interference světla je důsledkem vlnové povahy světla, byl vždy v historii považován za důkaz vlnové podstaty světla.

Matematika interference

Předpokládejme dvě harmonické světelné vlny v komplexním tvaru:

$$\tilde{\vec{E}}_1(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r}) \exp[-i(\omega t)] \quad \text{kde} \quad \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r}) = \vec{E}_{01} \exp\left[i(-\varepsilon_1 + \vec{k}_1 \cdot \vec{r})\right]$$

$$\tilde{\vec{E}}_2(\vec{r}, t) = \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r}) \exp[-i(\omega t)] \quad \text{kde} \quad \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r}) = \vec{E}_{02} \exp\left[i(-\varepsilon_2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r})\right]$$

Intensita interferujících vln E_1 a E_2 je dána vztahem (E_1 a E_2 jsou komplexní čísla):

$$I(\vec{r}) = \tilde{\vec{E}}_0(\vec{r}) \tilde{\vec{E}}_0^*(\vec{r})$$

Po dosazení:

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= I_1 + I_2 + \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r}) \tilde{\vec{E}}_{02}^*(\vec{r}) + \tilde{\vec{E}}_{02}(\vec{r}) \tilde{\vec{E}}_{01}^*(\vec{r}) = \\ &= I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \tilde{\vec{E}}_{01}(\vec{r}) \tilde{\vec{E}}_{02}^*(\vec{r}) \right\} \end{aligned}$$

Výsledná intensita interferujících vln:

$$\boxed{I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2 \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= (-\varepsilon_1 + \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \\ \varphi_2 &= (-\varepsilon_2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

Matematika interference

Člen: $2\vec{E}_{01}\vec{E}_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ je interferenční člen, jeho velikost je závislá na

rozdílu fází δ interferujících vln: $\varphi_1 = (-\varepsilon_1 + \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$, $\varphi_2 = (-\varepsilon_2 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}$$

předpokládejme, že počáteční fázový rozdíl mezi interferujícími vlnami je roven nule, pak dostaneme pro fázový rozdíl vztah:

$$\delta = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}$$

Obecně, pro n interferujících světelných vln: $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \left[\sum_{j=1}^n \tilde{\vec{E}}_{0j}(\vec{r}, t) e^{i\alpha_j} \right] e^{i\omega t}$

Komplexní amplituda: $\tilde{\vec{E}}_0(\vec{r}, t) e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^n \tilde{\vec{E}}_{0j}(\vec{r}, t) e^{i\alpha_j} \rightarrow E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha})(E_0 e^{i\alpha})^*$

Rozložení intensity světla v interferenčním poli.

Interferující světelné vlny E_1 a E_2 jejichž zdroji jsou štěrbiny S_1 a S_2 , mají stejnou amplitudu, vlnovou délku a periodu. Liší se fázovým rozdílem δ . Intenzita I součtu obou vln je dána vztahem:

$$I(\vec{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{k}$$

Interferenční maxima (maxima intensity) nastanou je-li: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 2m\pi$
kde: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

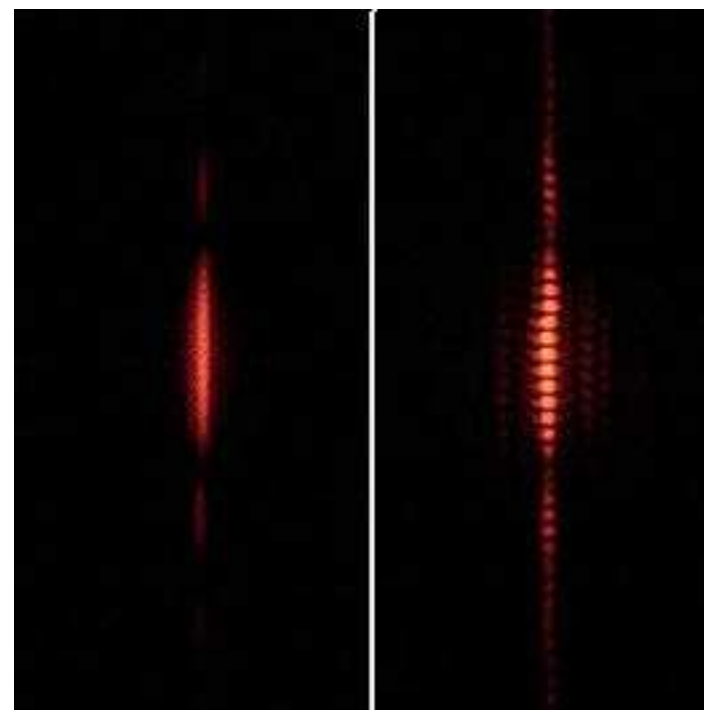
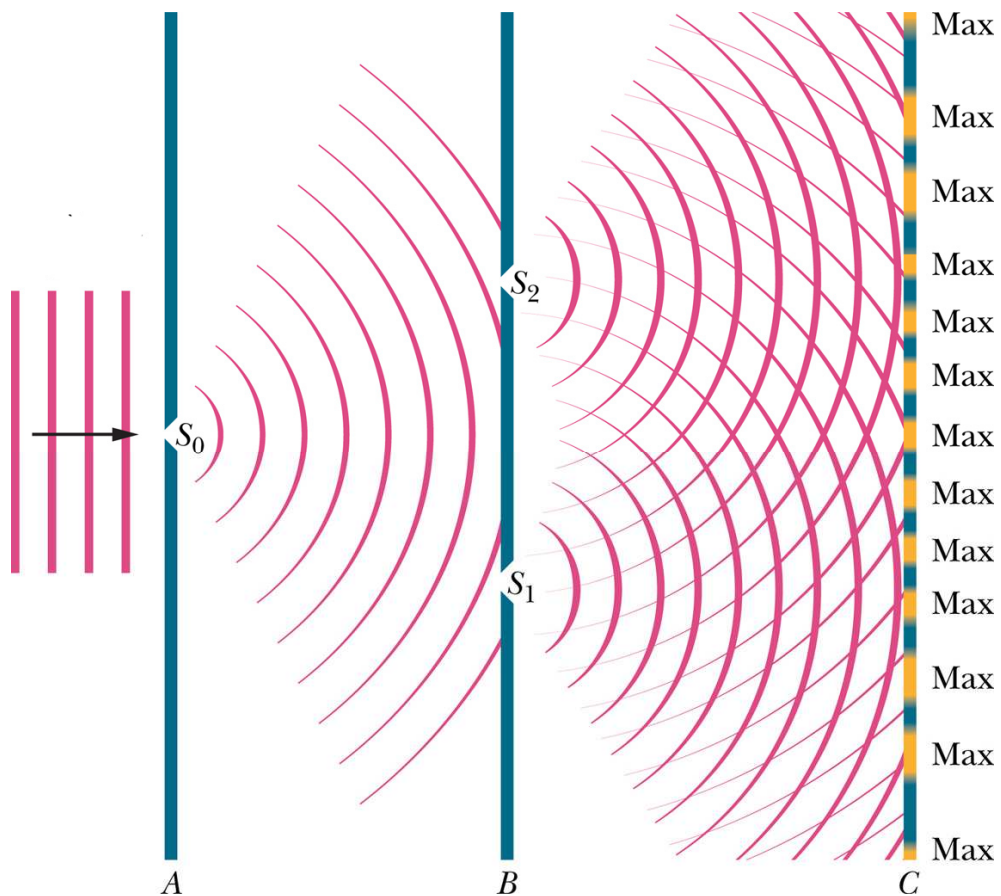
$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Interferenční minima (minima intensity) nastanou je-li: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi$
kde: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

Interference světla - dělení vlnoplochy.

Youngův dvou-štěrbínový interferenční experiment.



Jedna štěrbina.

Dvě štěrby.

Rozložení intensity světla v interferenčním poli. Interference dvou svazků

Interferující dvě světelné vlny jejichž zdroji jsou štěrby S_1 a S_2 , mají stejnou I_1 a I_2 , vlnovou délku a periodu. Liší se fázovým rozdílem δ . Intenzita I součtu obou vln je dána vztahem:

$$I_0 = I_1 = I_2$$
$$I(\vec{r}) = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$
$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{k}$$

Interferenční maxima (maxima intensity): $I_{\max} = 4 I_0$, nastanou, je-li splněna

podmínka (předpokládejme že $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$):

kde: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\delta = (r_1 - r_2) = \frac{2m\pi}{k} = m\lambda$$

Interferenční minima (minima intensity): $I_{\min} = 0$, nastanou je-li splněna podmínka:

$$\delta = r_1 - r_2 = \frac{(2m+1)\pi}{k} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

kde: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Rozložení intensity světla v interferenčním poli.

Interference dvou svazků

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

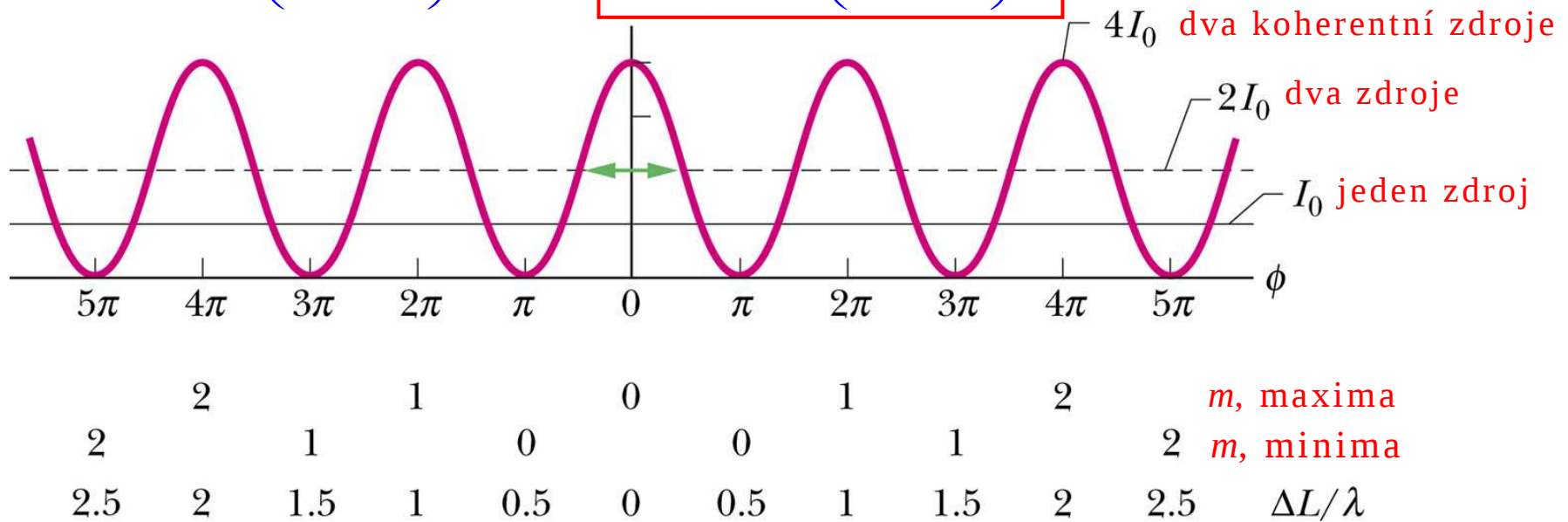
$$E_1 = E_0 \sin \omega t$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Maxima: $\delta = 2m\pi$ pro: $m = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \delta = 2m\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$

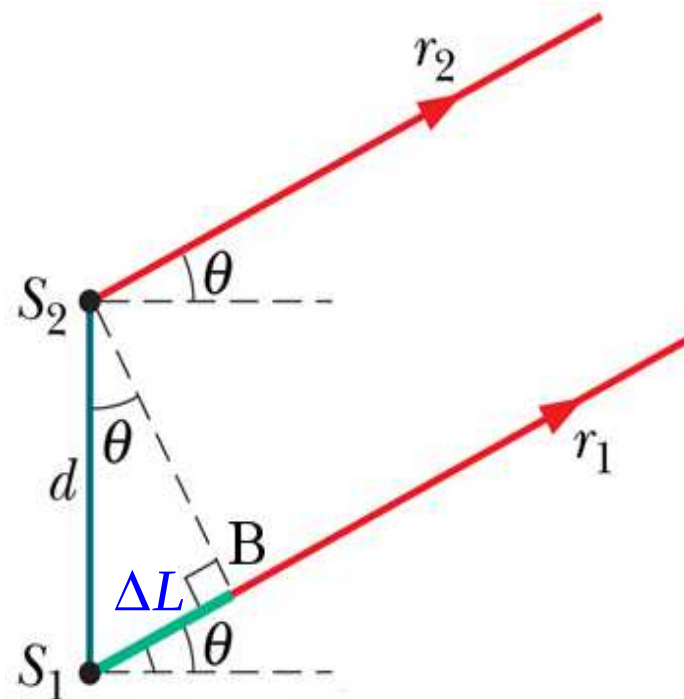
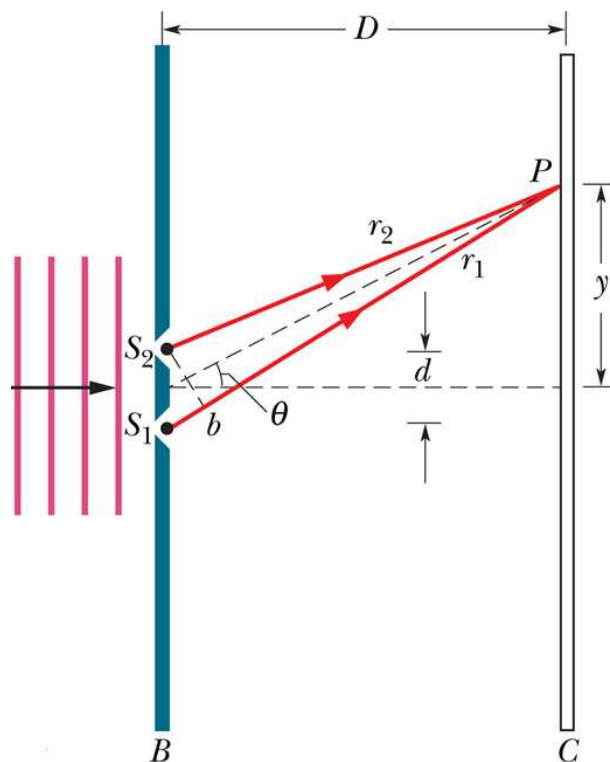
$$\rightarrow m\lambda = d \sin \theta$$

Minima: $\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ pro: $m = 0, 1, 2, \dots$



Dráhový rozdíl interferujících světelných vln.

Velikost **fázového rozdílu** δ mezi dvěma světelnými vlnami závisí na rozdílu drah, které vlny urazí za stejně dlouhý časový interval, rozdíl těchto drah nazýváme **dráhový rozdíl**.

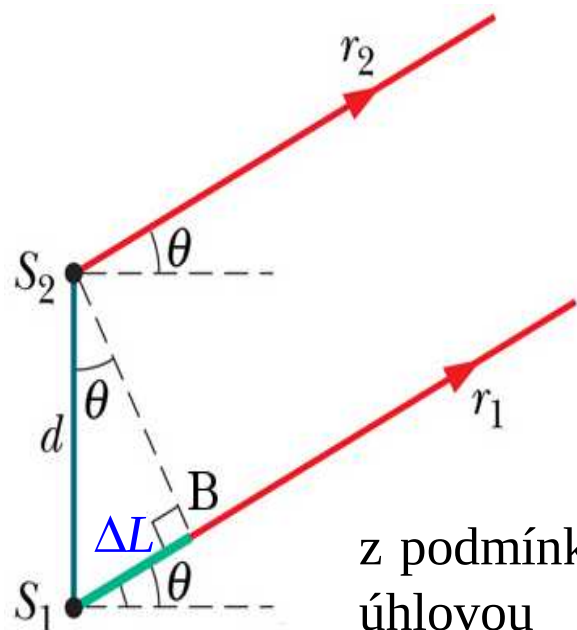


Dráhový rozdíl paprsků vystupujících z bodů S_1 a S_2 : $\Delta L = d \sin \theta$

Podmínka pro vznik interferenčního maxima pak je: $\Delta L = d \sin \theta = m\lambda$
 m je celé číslo.

Poloha interferenčních maxim.

Rozdíl optických drah mezi paprsky vycházejícími ze štěrbin S_1 a S_2 :



$$r_1 - r_2 = m\lambda$$

$$\overline{(S_1B)} = \overline{(S_1P)} - \overline{(S_2P)}$$

nebo-li: $\overline{(S_1B)} = r_1 - r_2 = d \sin \theta \approx d \theta$

neboť pro malé úhly můžeme psát: $\sin \theta \approx \theta$

pak pro úhel θ platí $\theta \approx \frac{y}{D} \rightarrow$

$$r_1 - r_2 = d \sin \theta \approx \frac{d}{D} y$$

z podmínky m -tého maxima dostaneme pro lineární polohu y_m a úhlovou polohu θ_m m -tého interferenčního proužku na zobrazovacím stínítku:

$$y_m \approx \frac{D}{d} m \lambda$$

$$\theta_m = \frac{m \lambda}{d}$$

Vzdálenost dvou sousedních interferenčních maxim:

$$y_{m+1} - y_m \approx \frac{D}{d} (m+1) \lambda - \frac{D}{d} m \lambda \rightarrow \Delta y \approx \frac{D}{d} \lambda$$

Koherence.

Elektromagnetické vlny konstruktivně interferují, je-li rozdíl fází mezi interferujícími vlnami konstantní.

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{k} = \text{konstanta}$$

Takové vlny, pro něž je tato podmínka splněna nazýváme **koherentní vlny**. Pro vlny, jejichž fáze se náhodně mění vymizí interferenční člen intenzita jejich součtu je prostým součtem intenzit jednotlivých vln v daném místě.

V souvislosti s koherencí vln hovoříme o **koherenční délce** l_c , a **koherenčním čase** τ_c .

Koherenční délkou l_c nazýváme vzdálenost l_c od zdroje koherentního záření, na níž můžeme elektromagnetickou vlnu považovat ještě za koherentní. Koherenční délka je tedy vzdálenost, kde může nastat interference.

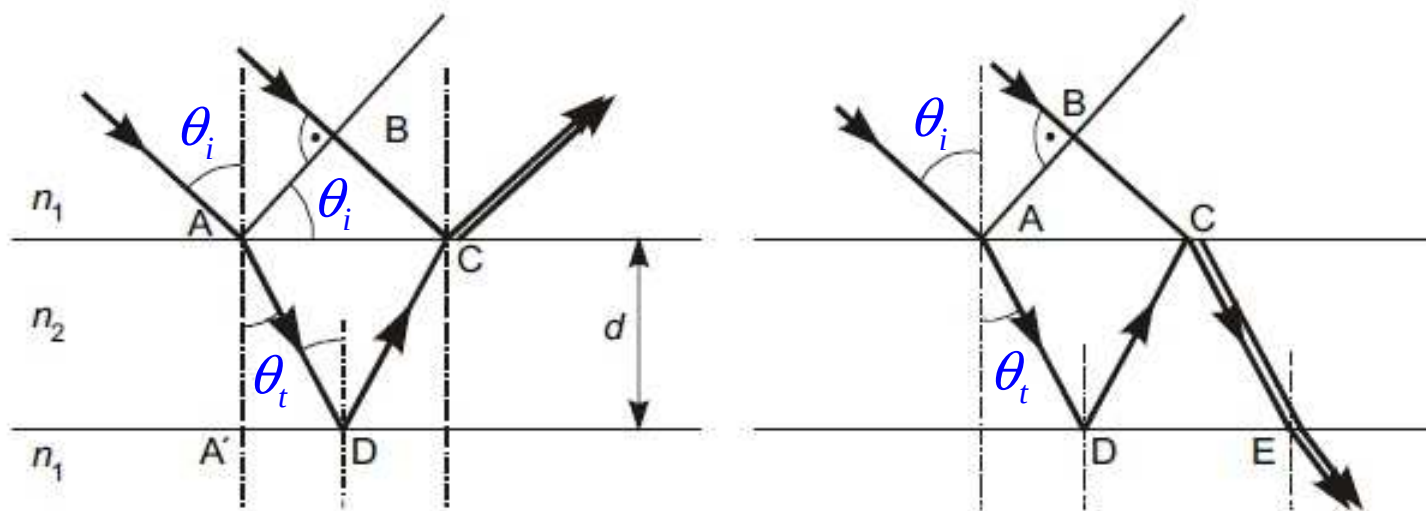
$$l_c = c\tau_c$$

Koherenční čas τ_c je mírou koherence vlny v různých časových okamžicích. oddělených intervalem τ_c , je tedy mírou monochromaticity zdroje elektromagnetické vlny.

$$\tau_c = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$$

Interference světla na dielektrických vrstvách - dělení amplitud.

Máme monochromatické světlo, dopadající na planoparalelní dielektrickou vrstvu tloušťky d (sklíčko, mýdlová blána apod. pro bílé světlo nesmí přesahovat tloušťka vrstvy příliš vlnovou délku světla). Oba povrchy vrstvy částečně odrážejí a částečně propouštějí světlo. Situace je znázorněna na obrázku:



Fázový rozdíl paprsků interferujících na tenké vrstvě.

Paprsek 1 procházející po dráze ADC urazí optickou dráhu:

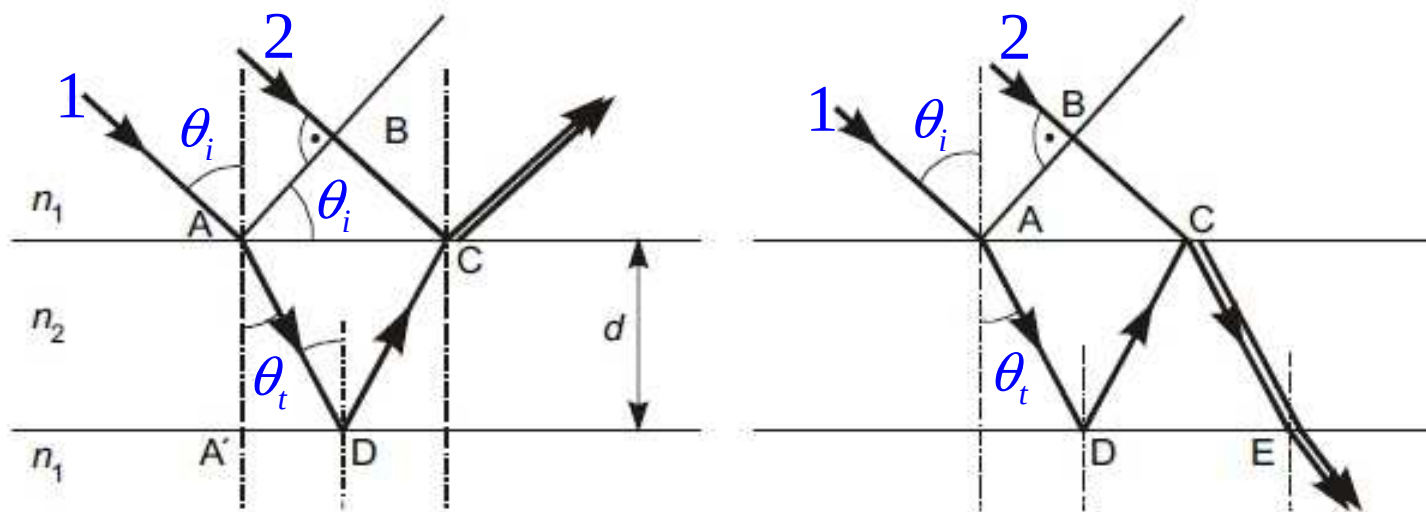
$$\Delta_{OD} = n_2(AD + DC)$$

Rozdíl optických drah mezi paprsky 1 a 2: $\Delta_{OD} = n_2(AD + DC) - n_1 AB$

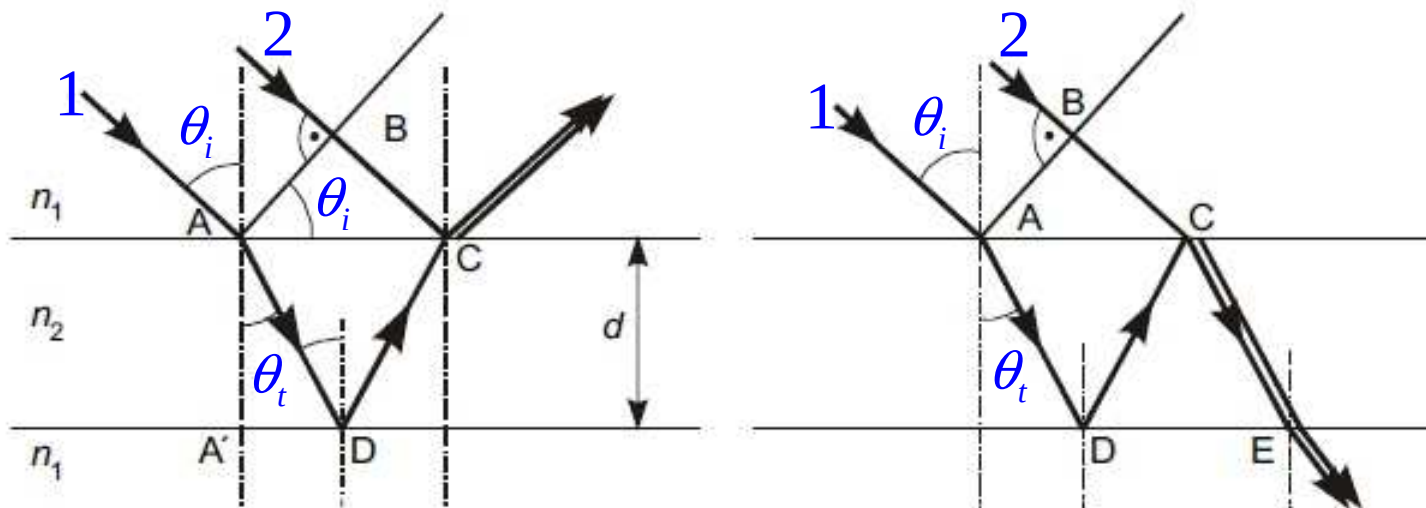
Z geometrie šíření paprsků a zákona lomu dostaneme pro rozdíl optických drah:

$$\Delta_{OD} = 2dn_2 \cos \theta_t$$

Fázový rozdíl paprsků: $\delta = k\Delta_{OD} = \frac{4\pi}{\lambda} dn_2 \cos \theta_t$



Fázový rozdíl paprsků interferujících na tenké vrstvě.



K fázovému rozdílu je třeba obecně připočíst změnu fáze při odrazu (vzduch-sklo-vzduch) δ_{odraz} :

$$\delta + \delta_{\text{odraz}} = k\Delta_{OD} + \pi = \frac{4\pi}{\lambda} d n_2 \cos \theta_t + \pi$$

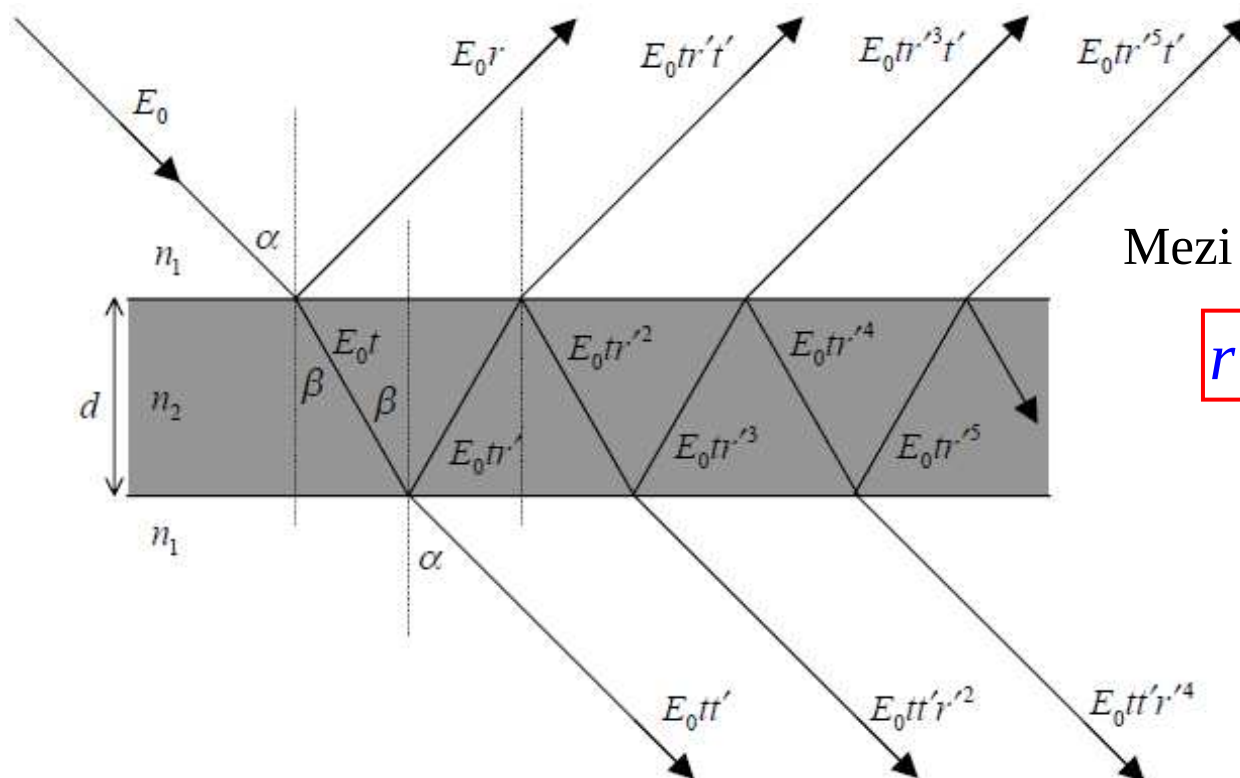
Interferenční maxima nastanou je-li fázový rozdíl: $\delta + \delta_{\text{odraz}} = 2n\pi$

Interferenční minima nastanou je-li fázový rozdíl: $\delta + \delta_{\text{odraz}} = (2n + 1)\pi$

kde n je celé číslo.

Více paprsková interference na dielektrické vrstvě.

Monochromatická rovinná vlna dopadá na skleněnou planparalelní desku, jejíž plochy jsou pokryty tenkými odrazivými vrstvami s vysokou odrazivostí. Světlo se odráží jak na horní vrstvě tak na spodní z částečně prochází. Je nutné při interferenci uvažovat velký počet paprsků. Amplitudový koeficient odrazu při dopadu světla z prostředí na desku je r , amplitudový koeficient propustnosti je t . Při dopadu světla z desky do prostředí jsou amplitudové koeficient odrazu r' a propustnosti t' .



Mezi koeficienty platí vztahy:

$$r = -r', \quad r^2 + t t' = 1$$

Více paprsková interference na dielektrické vrstvě.

Výsledná intenzita elektrického pole E_t prošlého deskou je dána součtem dílčích vln:

$$E_t = E_0(tt' + tt'r'^2e^{i\delta} + tt'r'^4e^{i2\delta} + \dots + tt'r'^{2(m-1)}e^{i(m-1)\delta} + \dots)$$

$$E_t = E_0tt'(1 + r'^2e^{i\delta} + r'^4e^{i2\delta} + \dots)$$

Součet v závorce je součet geometrické řady s kvocientem q : $q = r'^2e^{i\delta}$

$$E_t = \frac{tt'}{1 - r'^2e^{i\delta}} E_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Intenzita světla: $I_t = E_t E_t^* = \frac{(tt')^2 |E_0|^2}{1 + r'^4 - r'^2 [e^{i\delta} + e^{-i\delta}]} \rightarrow$

$$I_t = \frac{(1-R)^2 |E_0|^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} \rightarrow I_t = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}} = I_0 A(\delta)$$

Kde: $F = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad R = r'^2$

Více paprsková interference na dielektrické vrstvě.

Funkci: $A(\delta) = \left(1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}\right)^{-1}$ nazýváme Airiho funkcí.

Airiho funkce představuje rozdělení hustoty toku procházejícího světla.

Parametr F nazýváme kontrast: $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

Parametr R je intenzitní odrazivost: $R = r'^2$

Propustnost desky T_d zavedeme: $T_d = \frac{I_t}{I_0}$, I_t intenzita propuštěného světla, I_0 je intenzita dopadajícího světla.

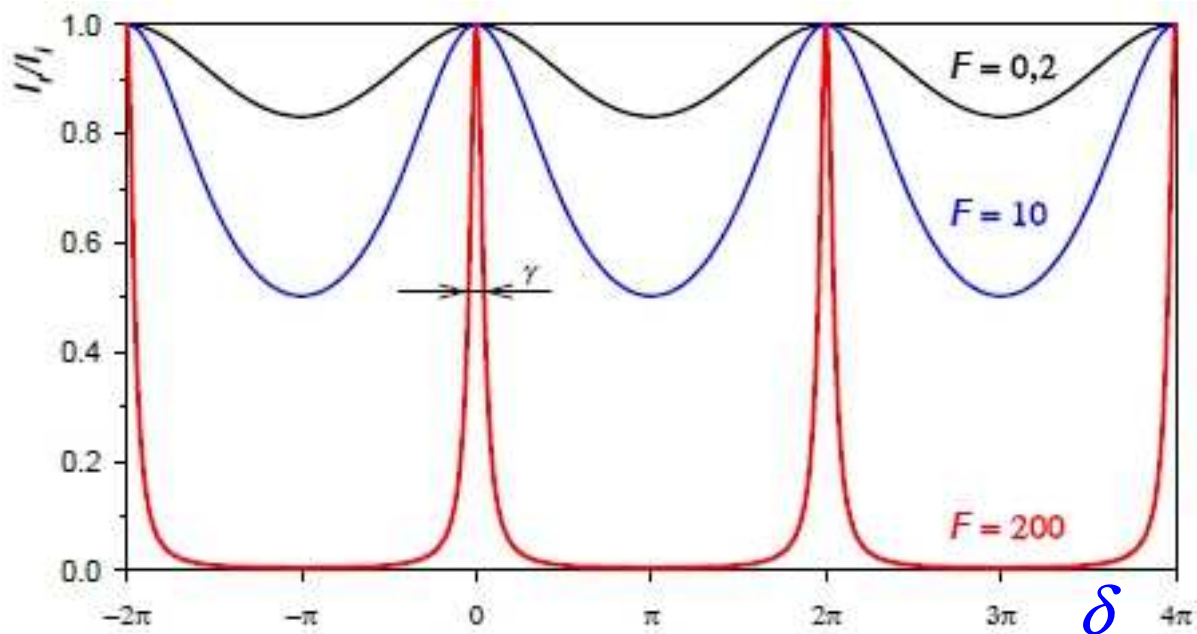
Intenzita odraženého světla: $I_r = I_0 - I_t$

Odrazivost desky pak je dána poměrem:

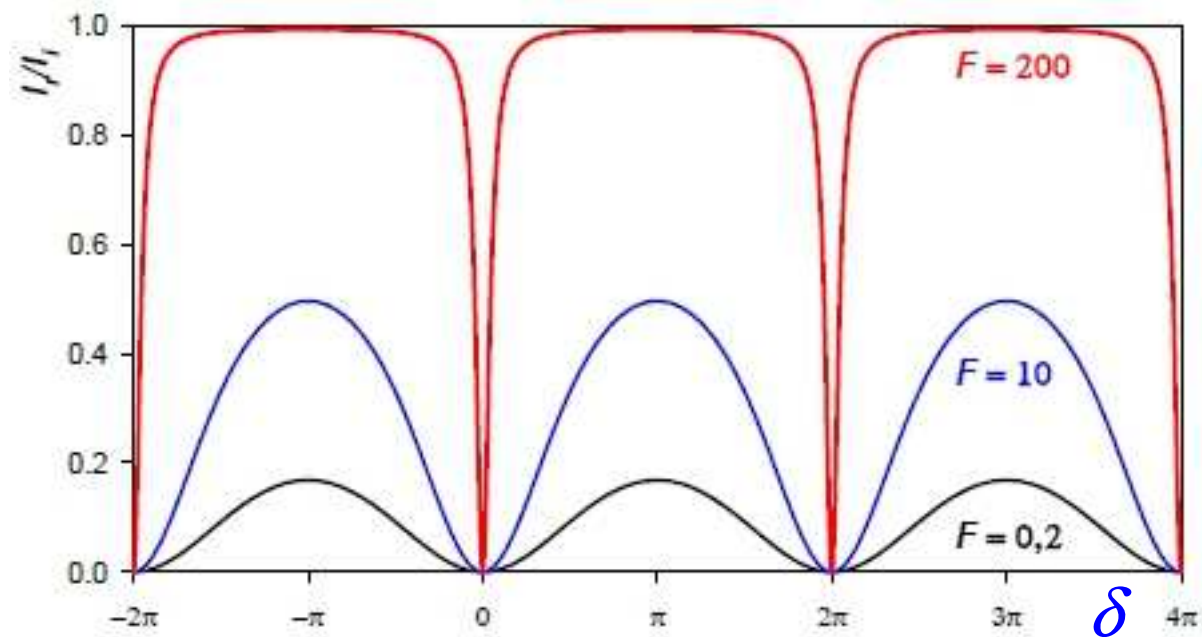
$$R_d = \frac{I_r}{I_0}$$

Mezi propustností a odrazivostí desky platí: $T_d + R_d = 1$

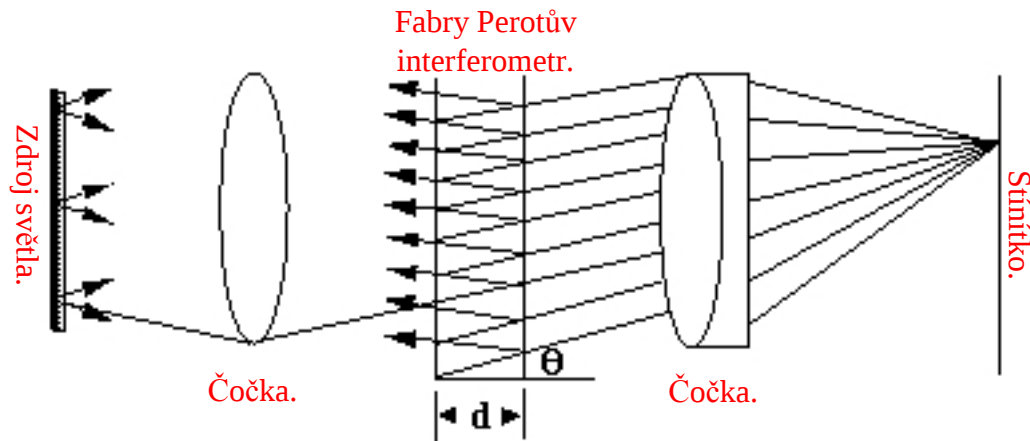
Závislost propustnosti planparalelní desky na fázovém zpoždění δ .



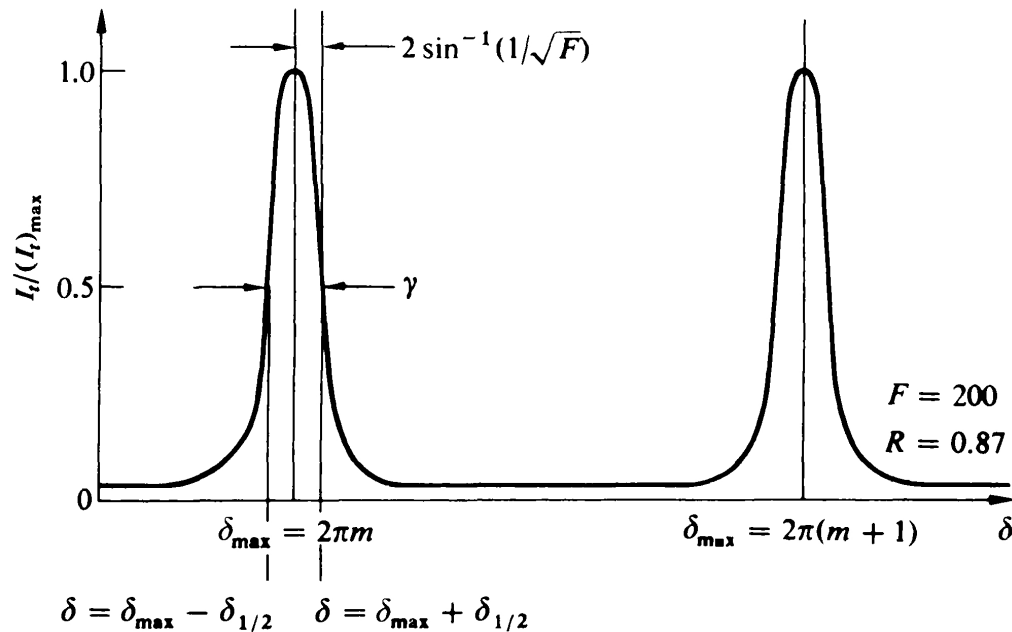
Závislost odrazivosti planparalelní desky na fázovém zpoždění δ .



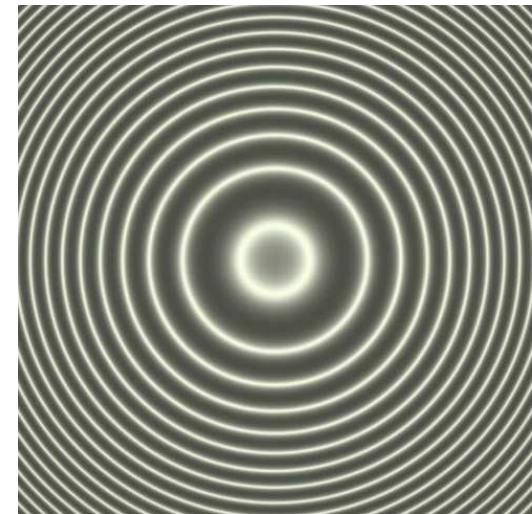
Fabry-Perotův interferometr.



Fabry Perotův interferometr sestává ze dvou vzájemně rovnoběžných polopropustných zrcadel oddělených vzduchovou vrstvou tloušťky d .



Vzdálenost interferenčních maxim v závislosti na fázovém posunu.



Obraz interferenčního pole.