

Difrakce světla.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

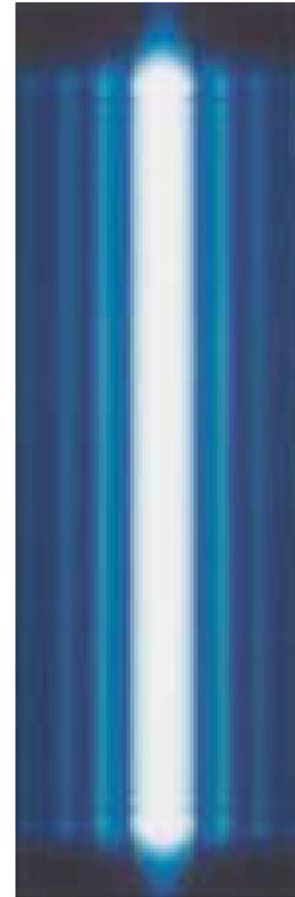
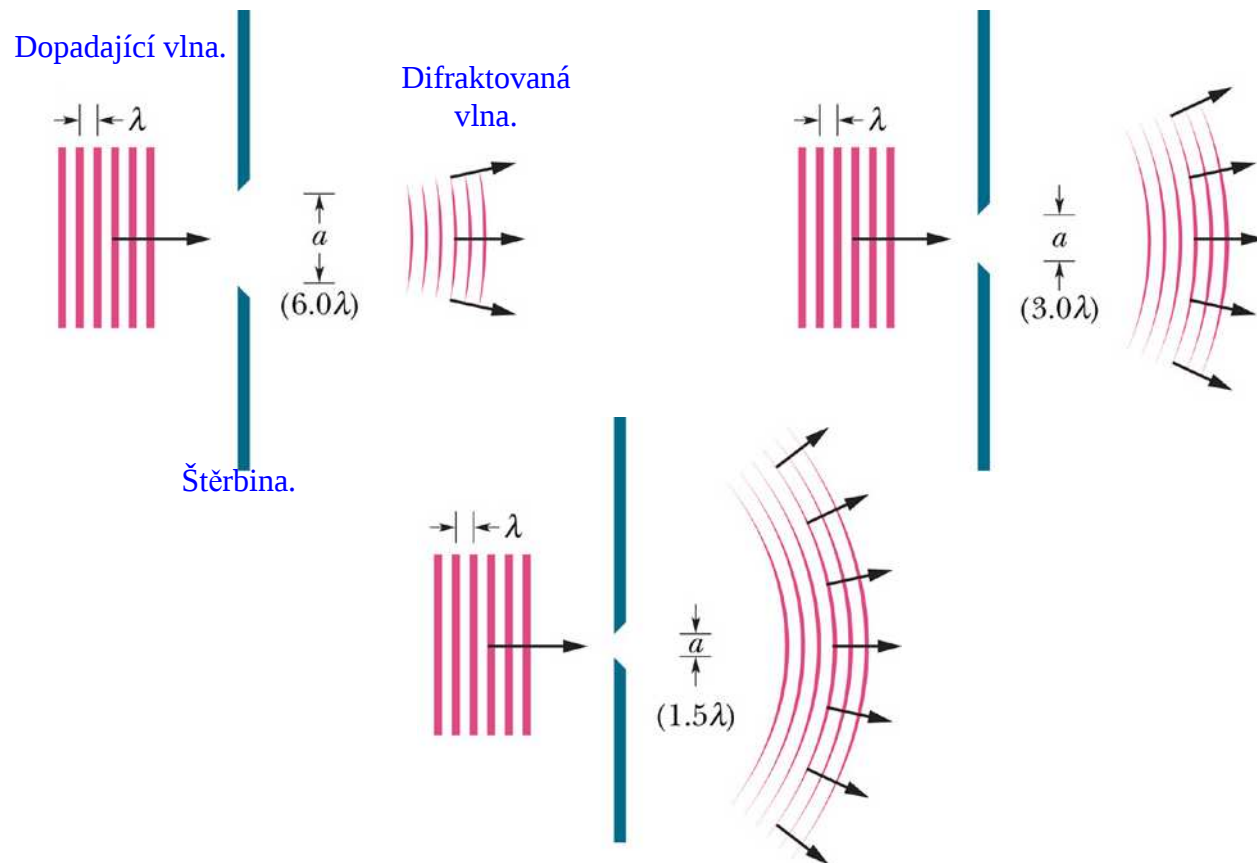
Feynmanovy přednášky z fyziky

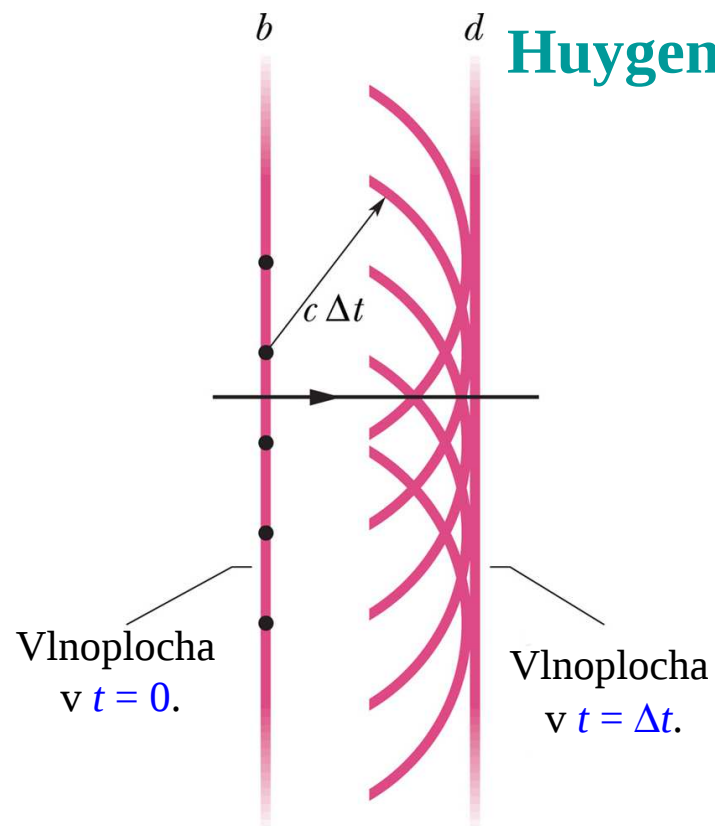
Fragment 2000

Eugene Hecht, Optics 4th edition

Difrakce světla.

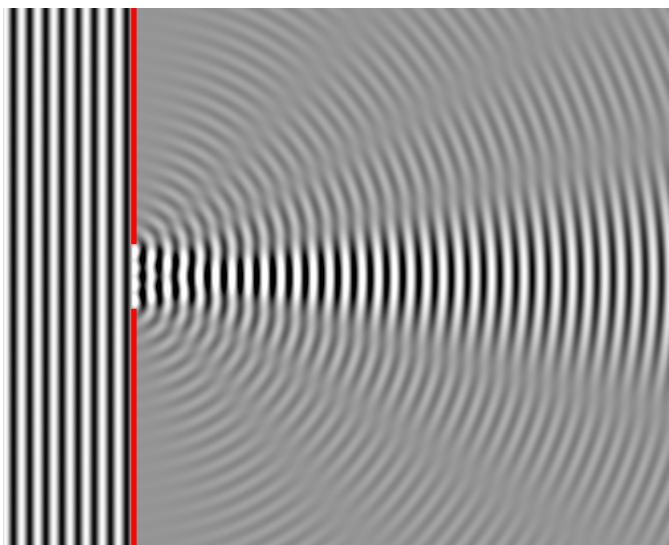
Světlo dopadající na nepropustnou překážku v níž je malá štěrbinina (apertura) se za touto štěrbinou šíří nejen v původním směru šíření, ale též ve směrech svírajících s původním směrem šíření libovolný úhel. Difrakce světla za štěrbinou bude tím větší, čím je rozměr štěrbininy menší, ve srovnání s vlnovou délkou dopadajícího světla.



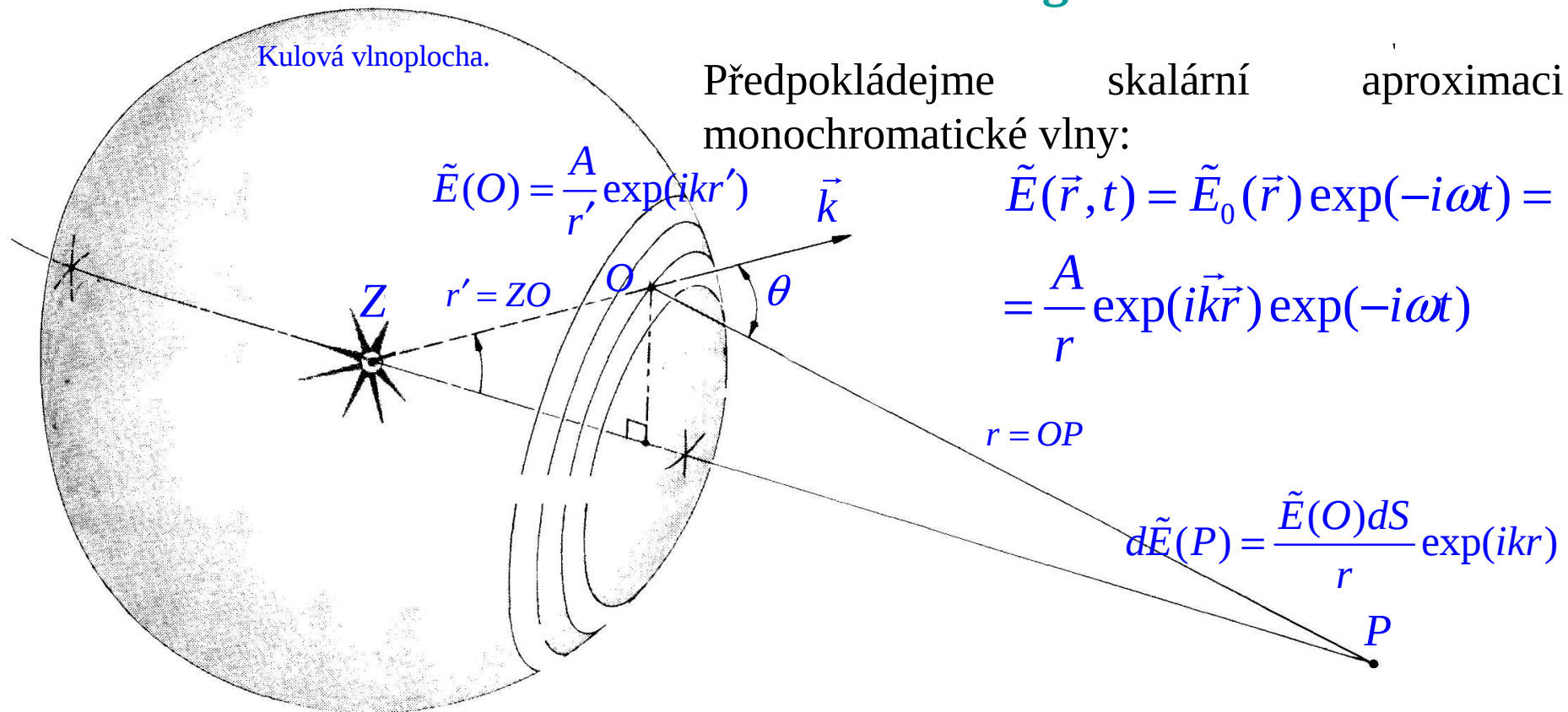


Huygensův-Fresnelův princip.

Huygensův princip říká, že každý bod vlnoplochy se stává novým zdrojem sekundárních vln, šířících se radiálně od zdroje. Plocha proložená body v čele sekundárních vln, v nichž mají tyto vlny stejnou fázi je pak novou vlnoplochou. Huygensův princip nezahrnuje interferenci sekundárních vln. Interferenci sekundárních vln doplnil do Huygensova principu Fresnel. Z Huygensova Fresnelova principu pak vyplývá, že výsledná vlnoplocha je dána obálkou superposice všech elementárních vln.



Fresnel-Kirchhoffův integrál.



Příspěvek elementu $dS(O)$ na vlnoploše k poli v bodě P :

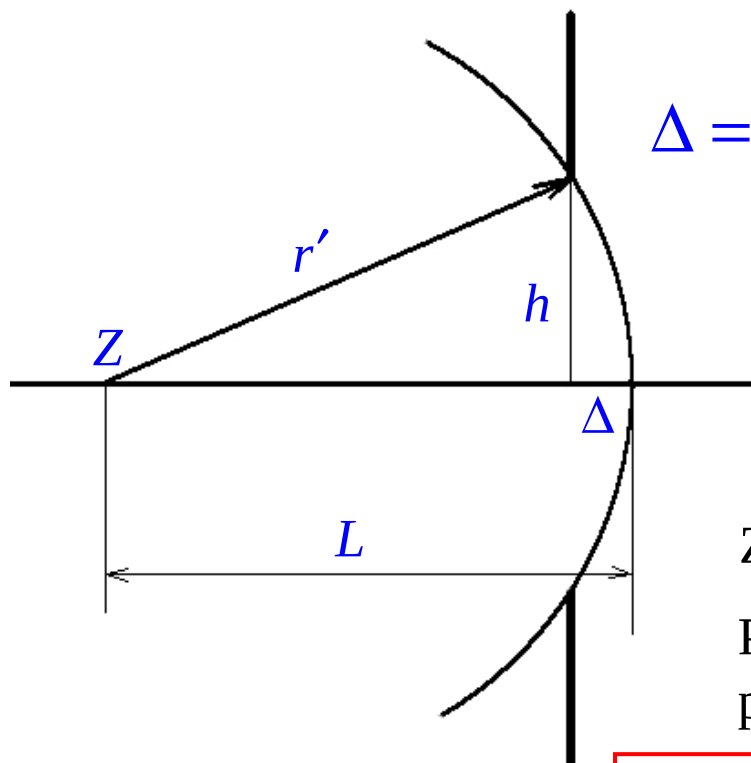
$$d\tilde{E}(P) = \frac{AdS}{rr'} \exp[ik(r + r')]$$

Celkové pole v bodě P od všech elementů apertury:

$$\tilde{E}(P) = -\frac{i}{\lambda} A \int_{\text{Apertura}} \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{1}{rr'} \exp[ik(r + r')] dS$$

Fraunhoferovo a Fresnelovo přiblížení.

Otázka je, kdy je třeba uvažovat zakřivení vlnoplochy. Ze zdroje Z vychází kulová vlna, jejíž jedna vlnoplocha je nakreslena na obrázku. Z Pythagorovy věty vyplývá:



$$\Delta = r' - r \sqrt{1 - \frac{h^2}{r'^2}}$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$$

Veličina Δ charakterizuje zakřivení vlnoplochy:

$$\Delta = \frac{h^2}{2r'}$$

Zakřivení je velké, je-li: $\Delta > \lambda$

Platí, že h^2 je úměrné ploše apertury S , $2r'$ pak je přibližně rovno vzdálenosti zdroje vlnění L .

Fresnelova oblast difrakce:

$$L < \frac{S}{\lambda}$$

musíme počítat se zakřivením vlnoplochy.

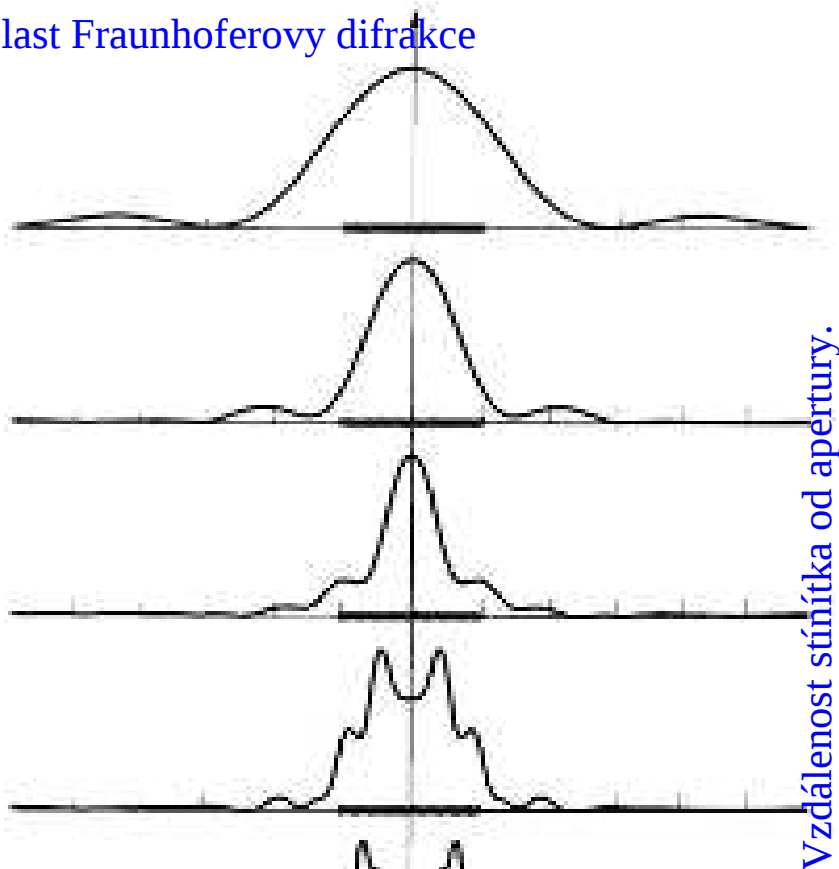
Fraunhoferova oblast difrakce:

$$L \gg \frac{S}{\lambda}$$

vlnu bereme jako rovinnou vlnu.

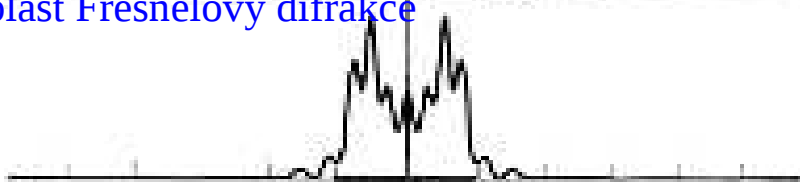
Fraunhoferovo a Fresnelovo přiblížení.

Oblast Fraunhoferovy difrakce

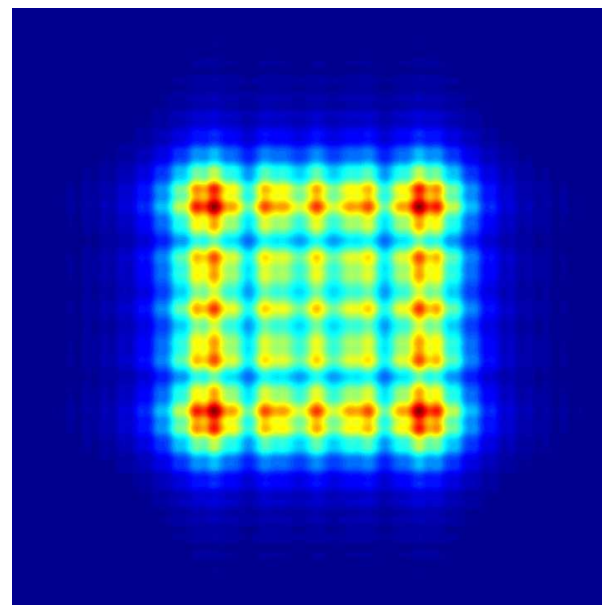
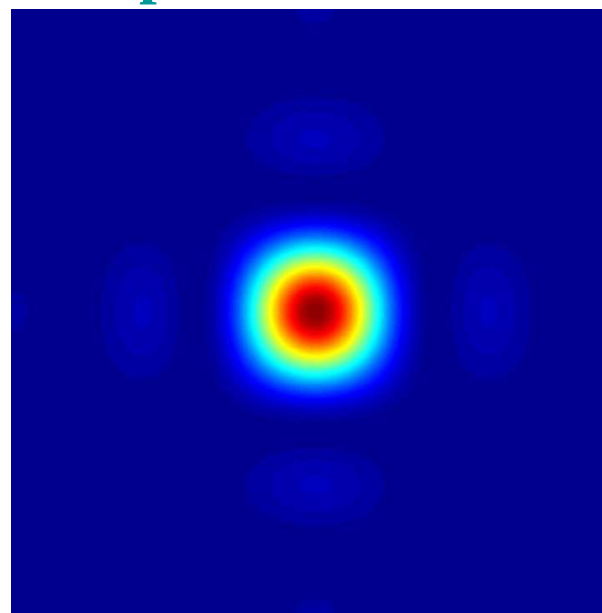


Vzdálenost stínítka od apertury.

Oblast Fresnelovy difrakce

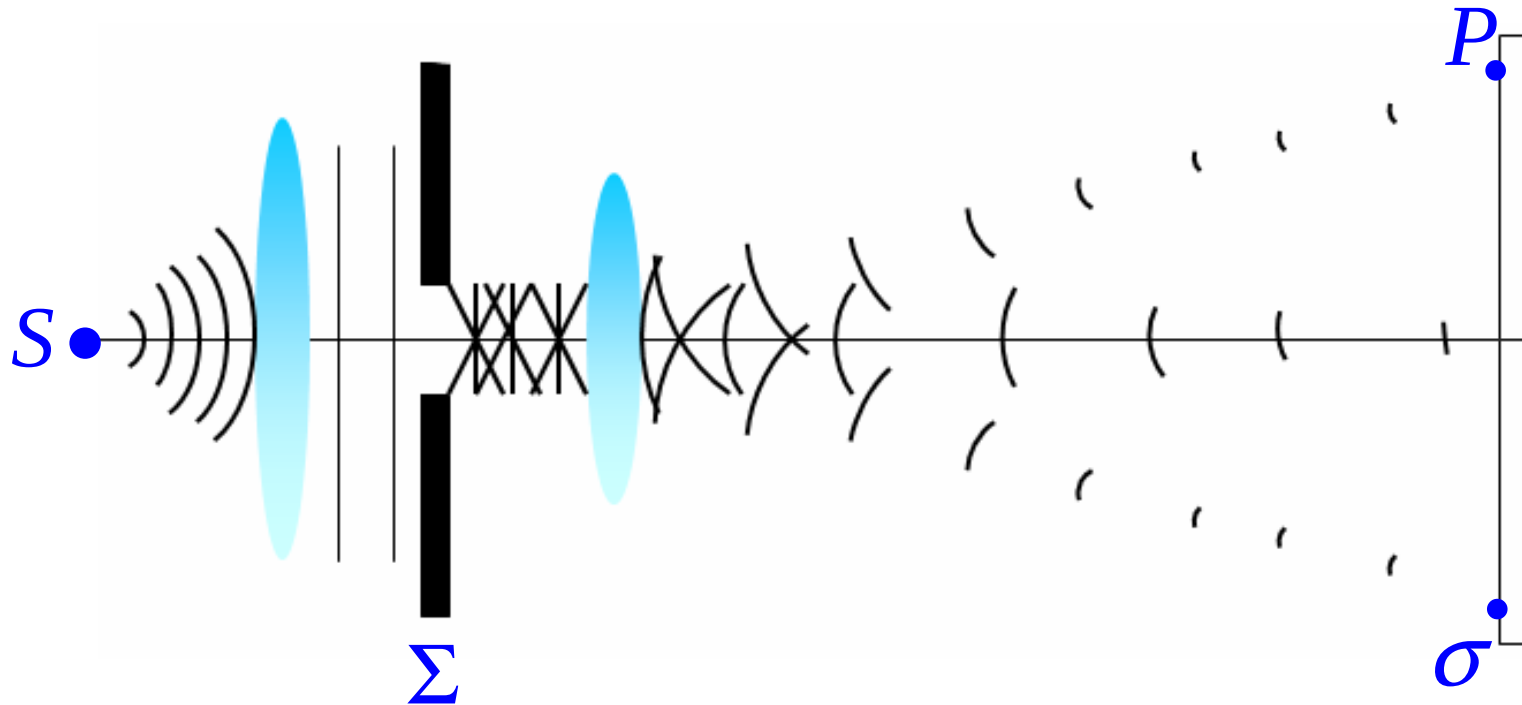


Štěrbina.

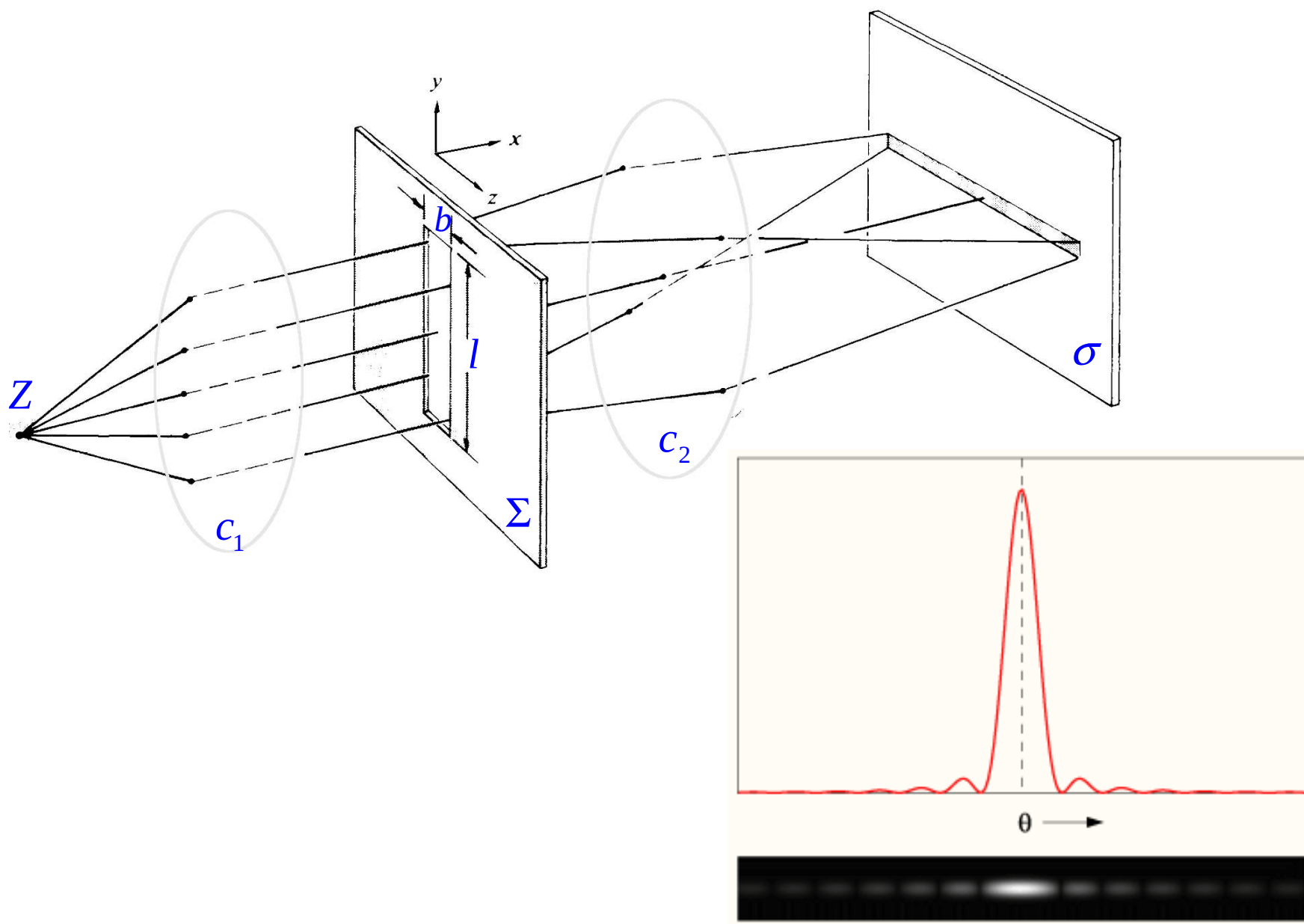


Fraunhoferovo přiblížení a optické zobrazení.

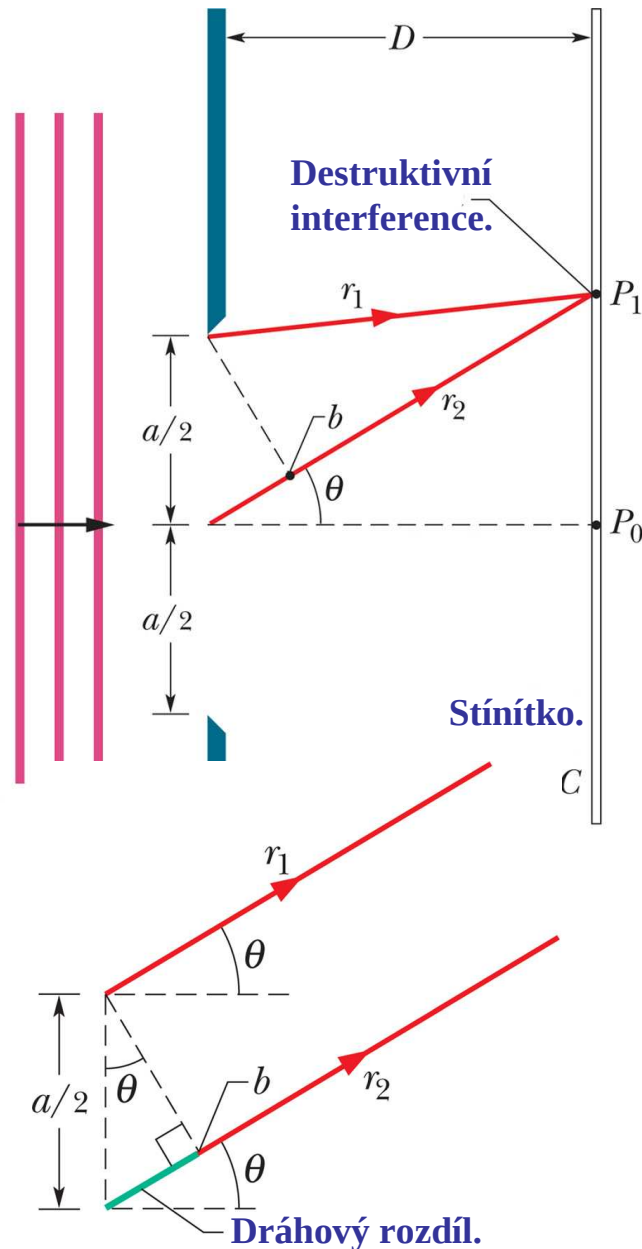
Fraunhoferovo přiblížení lze použít i v případech, kdy je vzdálenost zdroje světla nebo bodu pozorování od aperury malá, a to tehdy, je-li obraz zdroje vytvářen v pozorovací rovině optickou soustavou. To je důvodem, proč je vliv difrakce na zobrazení optickými přístroji vyšetřován v rámci jednodušší Fraunhoferovy aproximace.



Fraunhoferova difrakce na jedné štěrbíně.



Podmínka vzniku interferenčního minima prvního řádu.

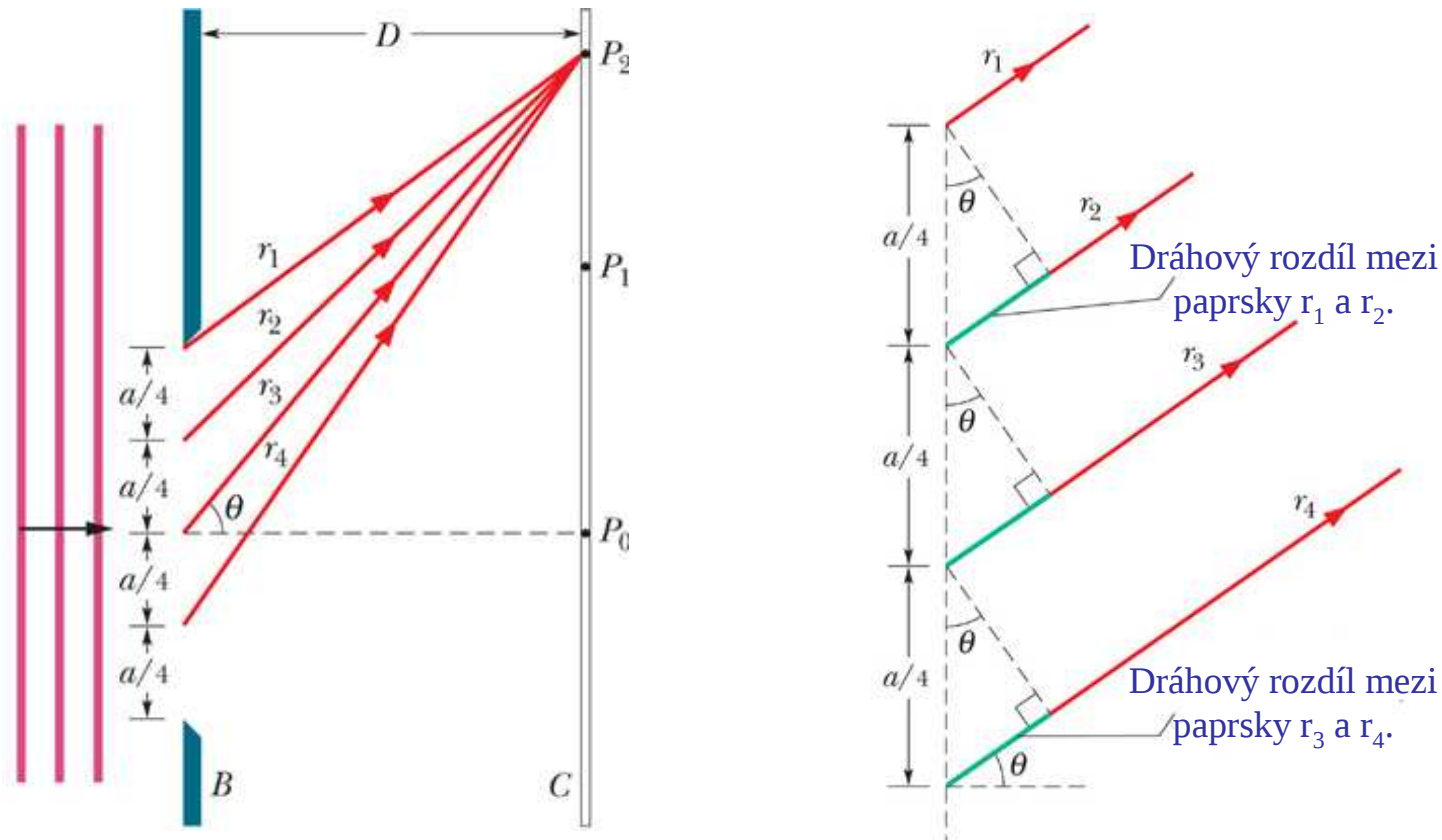


Je-li dráhový rozdíl mezi interferujícími paprsky šířícími se po dráhách r_1 a r_2 v bodě P_1 roven $\lambda/2$, pak paprsky budou v bodě P_1 na stínítku destruktivně interferovat. Dráhový rozdíl mezi paprsky je dán vzdáleností počátečního bodu vektoru r_2 a průsečíku, bodu b , kolmice vedené z počátku vektoru r_1 s vektorem r_2 .

Platí-li $D \gg a$, pak je dráhový rozdíl mezi paprsky r_1 a r_2 roven $(a/2) \sin \theta$. Podmínka pro první minimum:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = \lambda}$$

Podmínka vzniku interferenčního minima druhého řádu.



Analogickým postupem jako v případě podmínky pro vznik prvních interferenčních minim vyplývá pro druhá interferenční minima:

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = 2\lambda}$$

Obecná podmínka vzniku interferenčních minima.

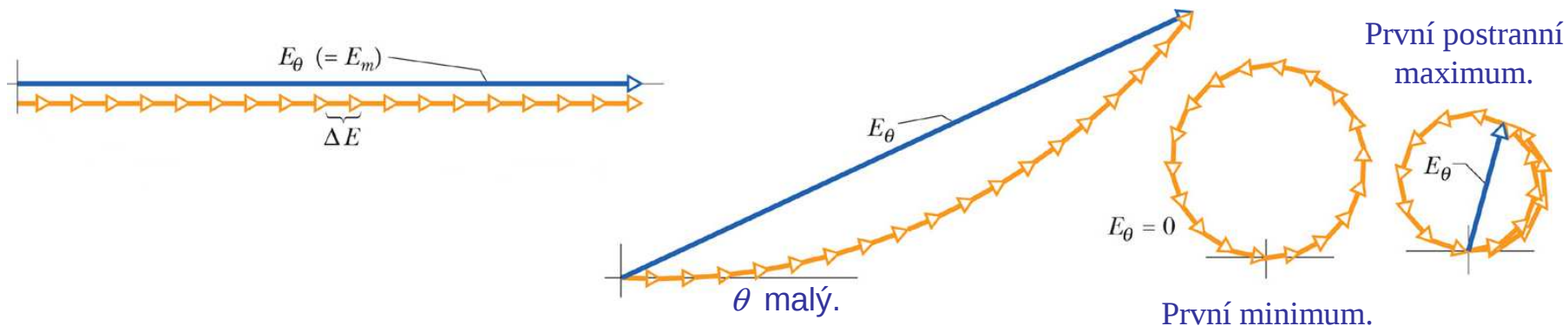
Zobecněním postupu pro velký počet zón ve štěrbině dostaneme obecnou podmínku vzniku interferenčních minim *m*-tého řádu:

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Intensity v při difrakci na jedné štěrbíně.

Pro nalezení poloh minim rozdělíme štěrbinu na N elementů, každý o velikosti Δx . Každý element je zdrojem sekundárního vlnění, které vytváří na stínítku interferenční obrazy. Rozložení intensity v interferenčním obrazci je funkcí úhlu θ , který svírá vybraný směr ke stínítku s optickou osou. Výslednou amplitudu elektrického pole ve vybraném bodě stínítka najdeme součtem fázorů elektrického pole od jednotlivých elementů štěrbiny.

$$\left(\begin{array}{c} \text{fázový} \\ \text{rozdíl} \end{array} \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \left(\begin{array}{c} \text{dráhový} \\ \text{rozdíl} \end{array} \right) \rightarrow \Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (\Delta x \sin \theta)$$



Rozdělení intensity světla v difrakčním obrazci – ohyb na jedné štěrbíně.

Závislost intensity difraktovaného světla:

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \phi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

Podmínka pro vznik minima:

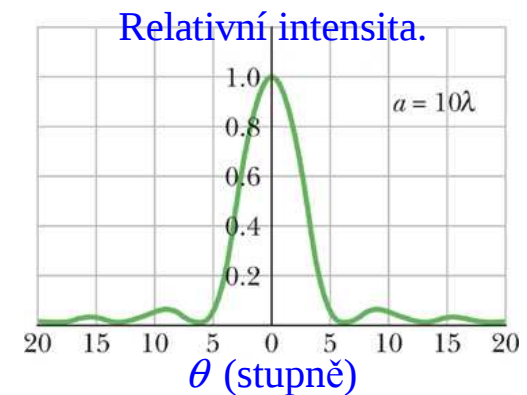
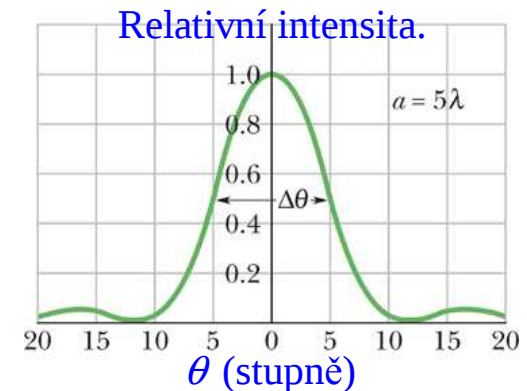
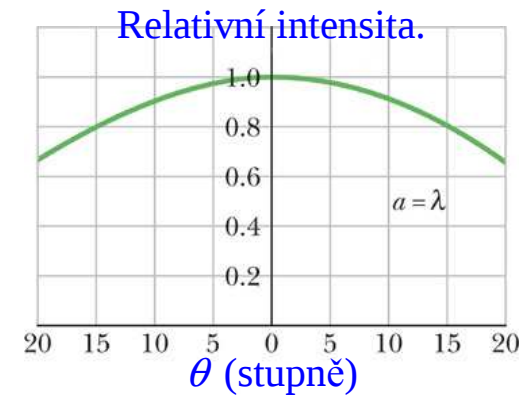
$$\alpha = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Podmínka pro vznik maxima:

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

nebo:

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$



Intensita světla difraktovaného jednou štěrbinou - odvození.

Rozdělíme clonu na elementární části délky Δx , jednotlivé fázory elektrického pole leží na kružnici a v limitě se blíží elementu kruhovému obloučku, na nějž kružnici můžeme rozdělit. Výsledná amplituda elektrického pole E_0 v místě P na stínítku je dána fázorovým součtem elementárních fázorů velikosti E_m . Úhel ϕ je fázový rozdíl.

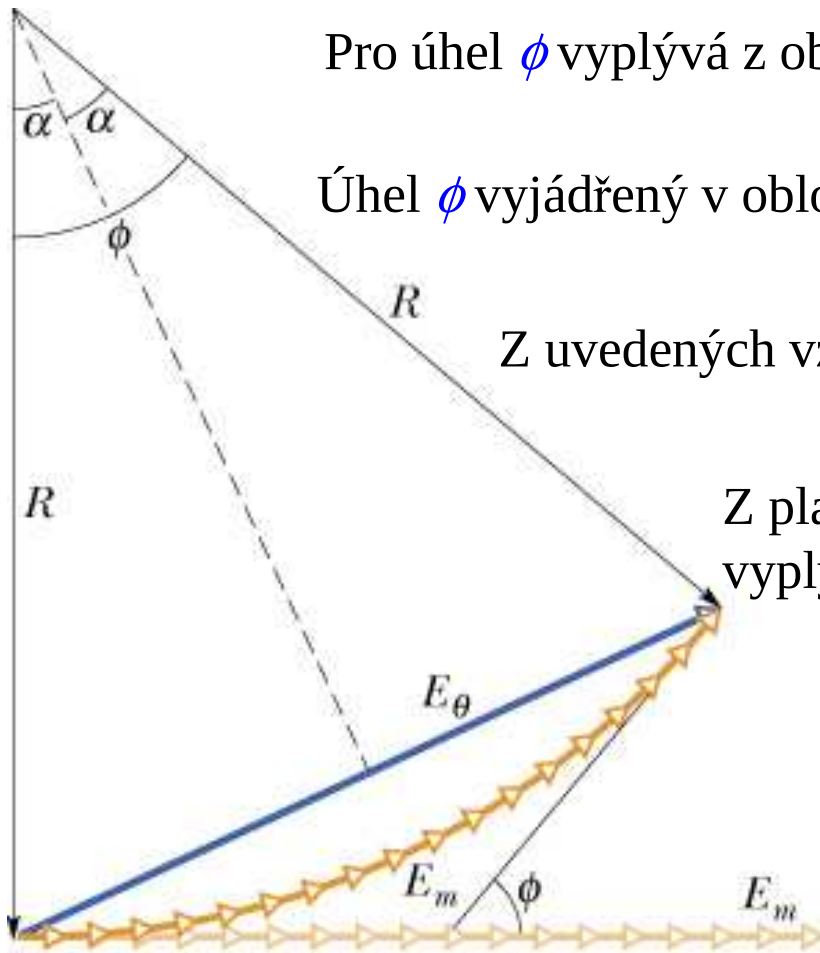
Pro úhel ϕ vyplývá z obrázku vztah: $\sin \frac{1}{2} \phi = \frac{E_\theta}{2R}$.

Úhel ϕ vyjádřený v obloukové míře: $\phi = \frac{E_m}{R}$.

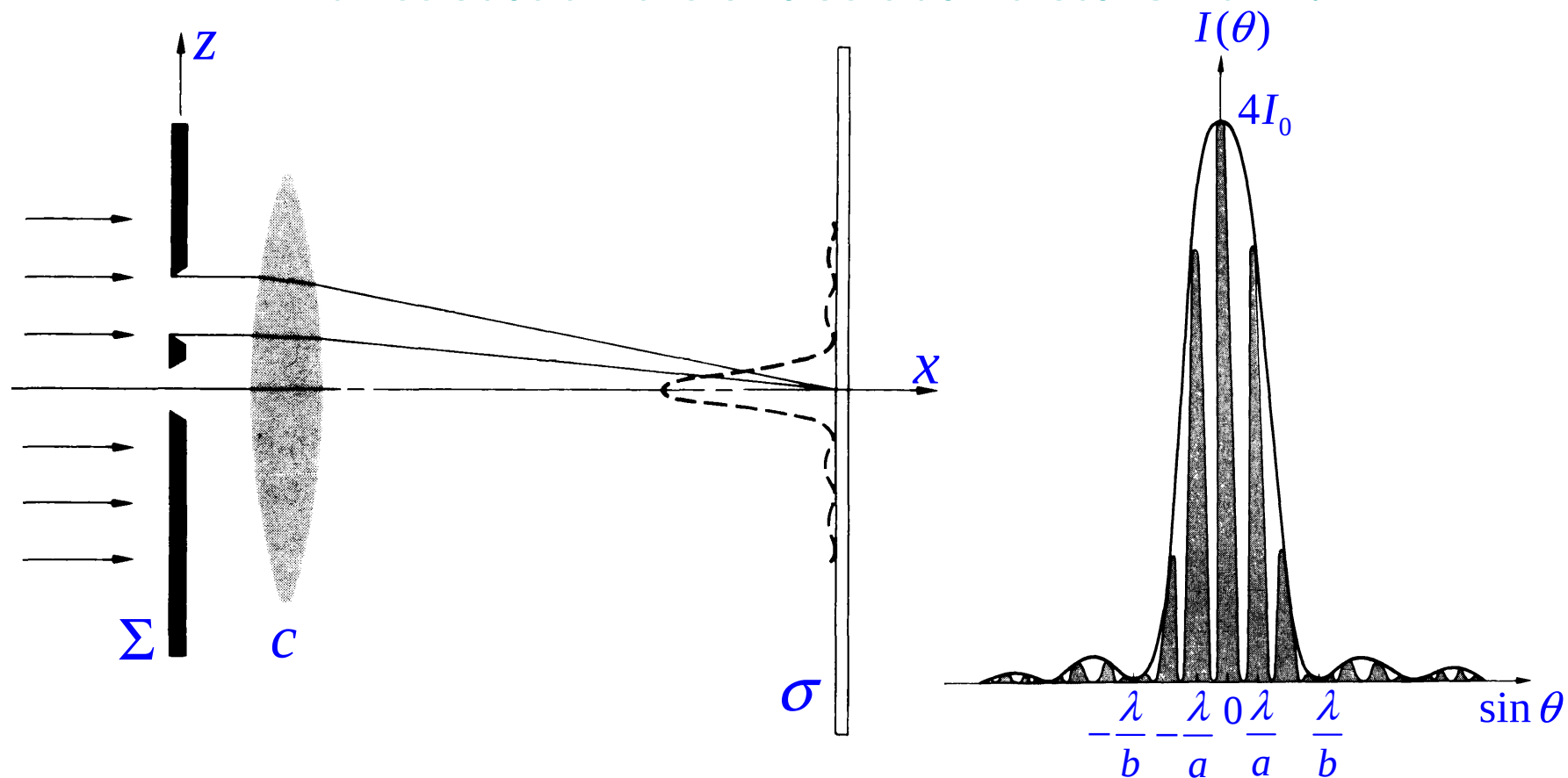
Z uvedených vztahů pak dostaneme: $E_\theta = \frac{E_m}{\frac{1}{2} \phi} \sin \frac{1}{2} \phi$.

Z platnosti vztahu: $\frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2}$ po dosazení vyplývá:

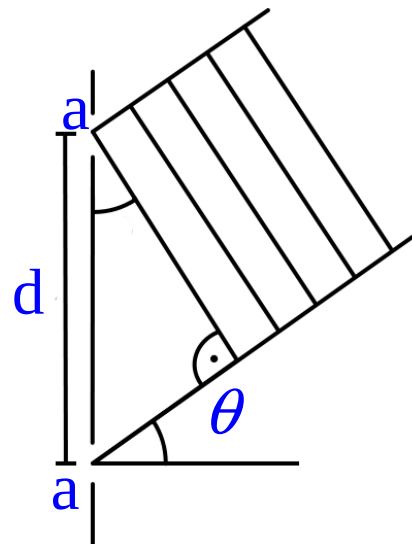
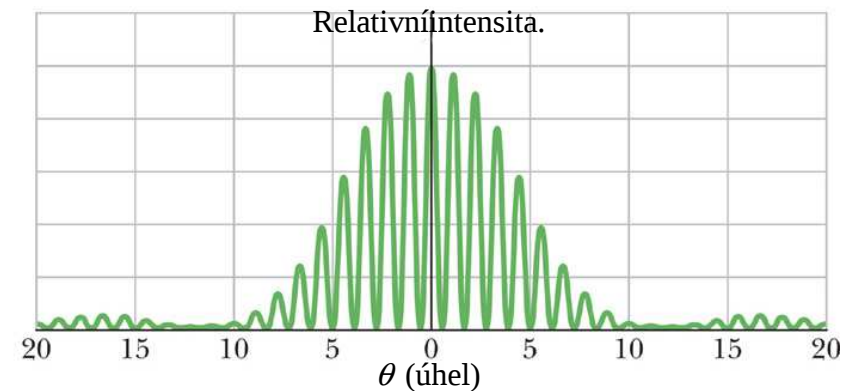
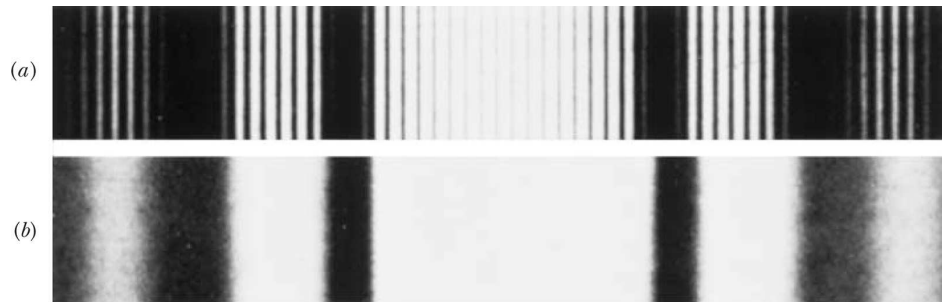
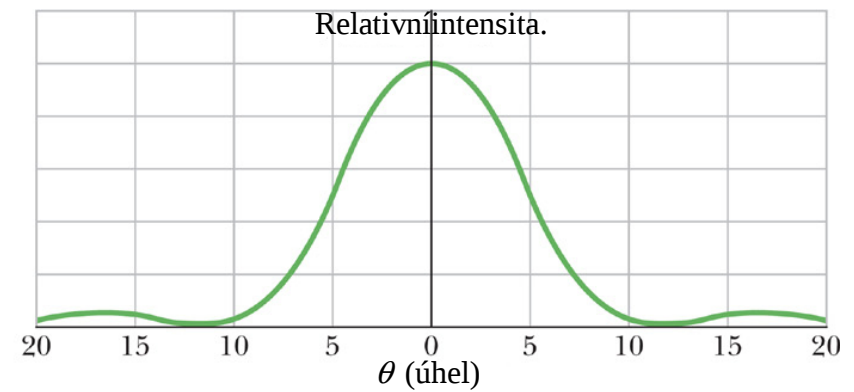
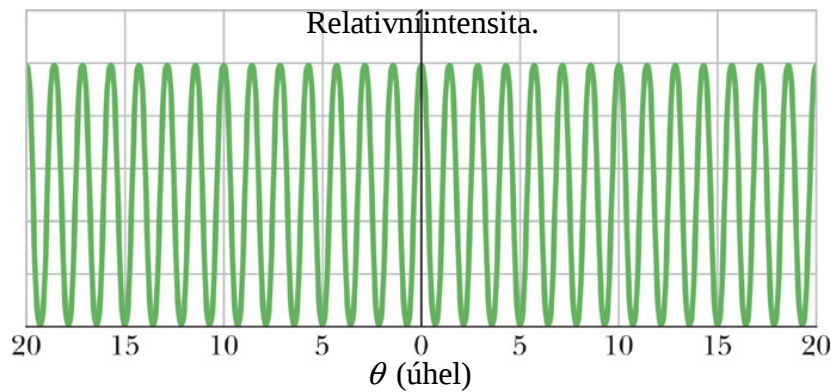
$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$



Difrakce světla na cloně se dvěma štěrbinami.



Difrakce světla na cloně se dvěma štěrbinami.

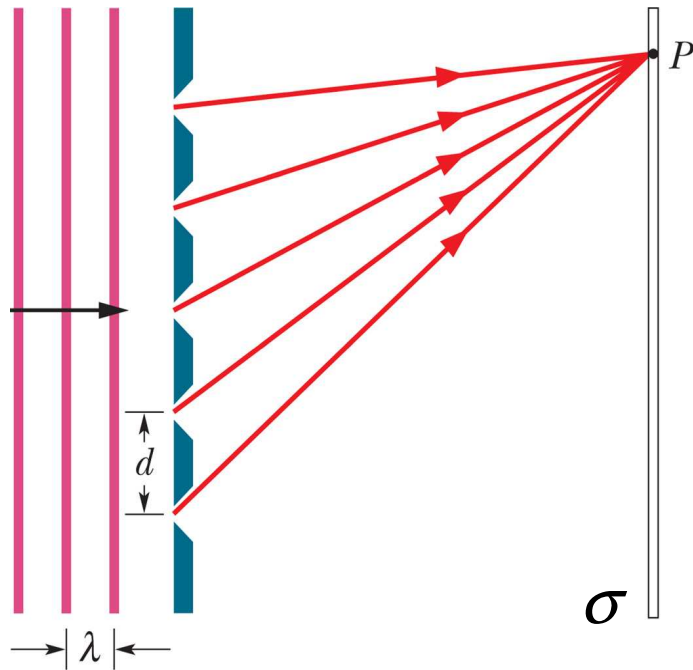


a – šířka štěrby,
 d – vzdálenost středů štěrbin

$$I(\theta) = I_m (\cos^2 \beta) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \quad \beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

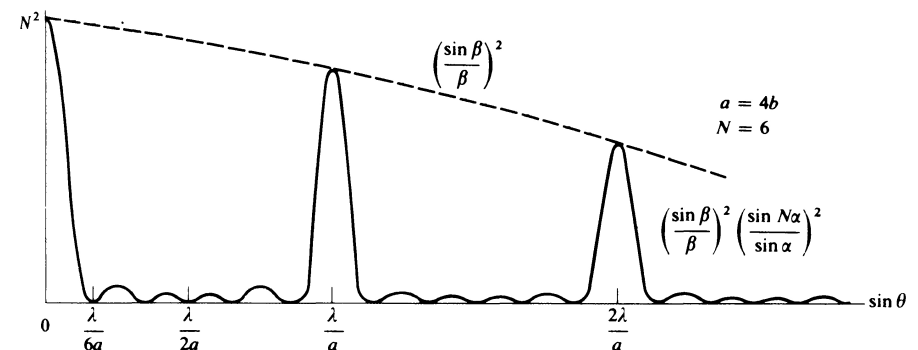
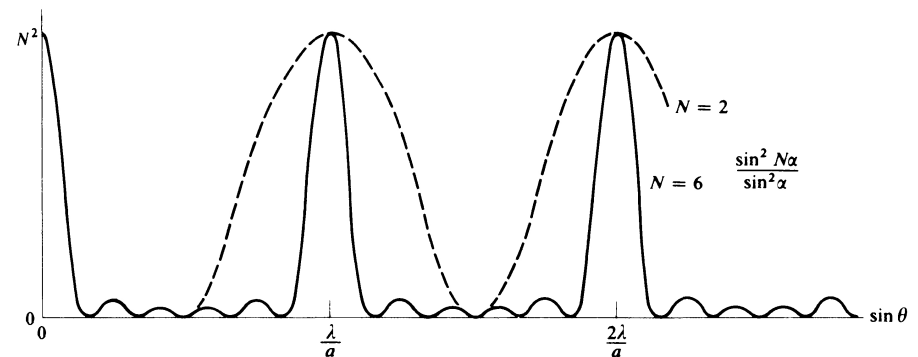
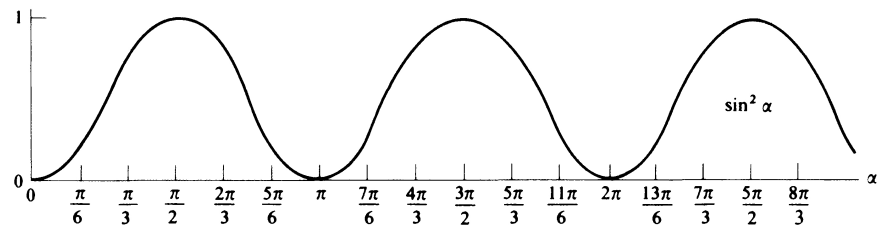
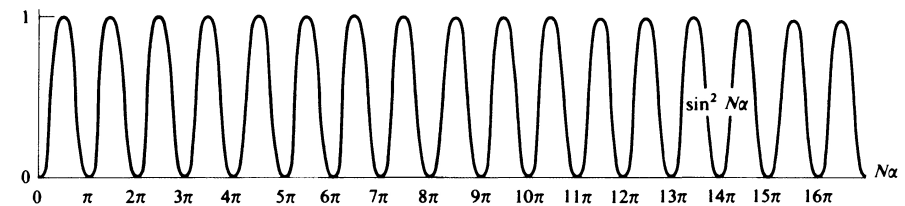
Difrakce světla na mnoha štěrbínách.



$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\alpha} \right)^2$$

Ohybový člen na štěrbíně: $\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$

Interferenční člen: $\left(\frac{\sin N\alpha}{\alpha} \right)^2$

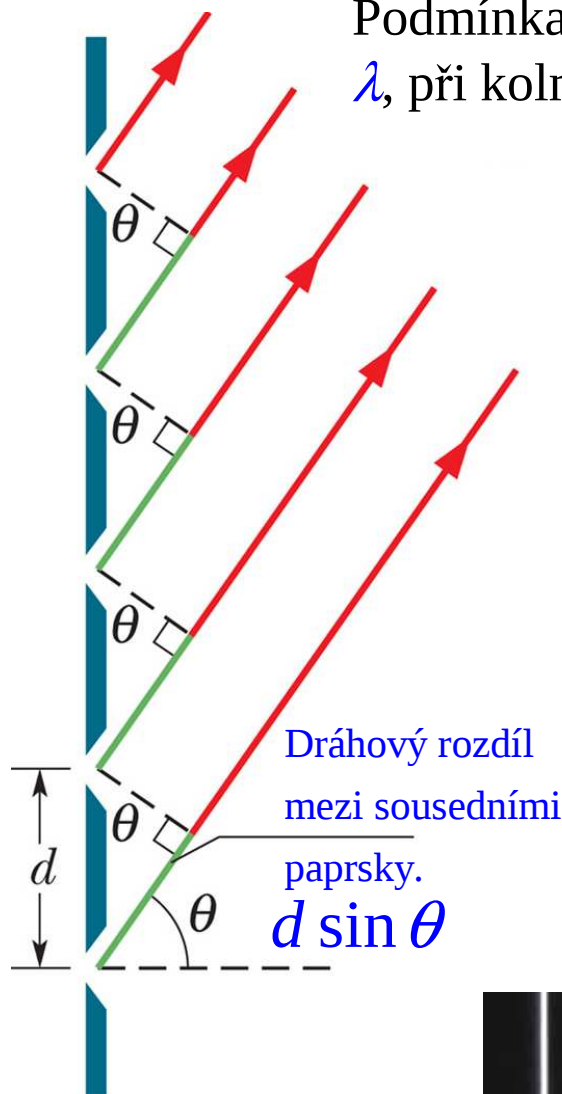


Difrakční mřížka.

Podmínka pro vznik interferenčních maxim pro světlo vlnové délky λ , při kolmém dopadu na mřížku:

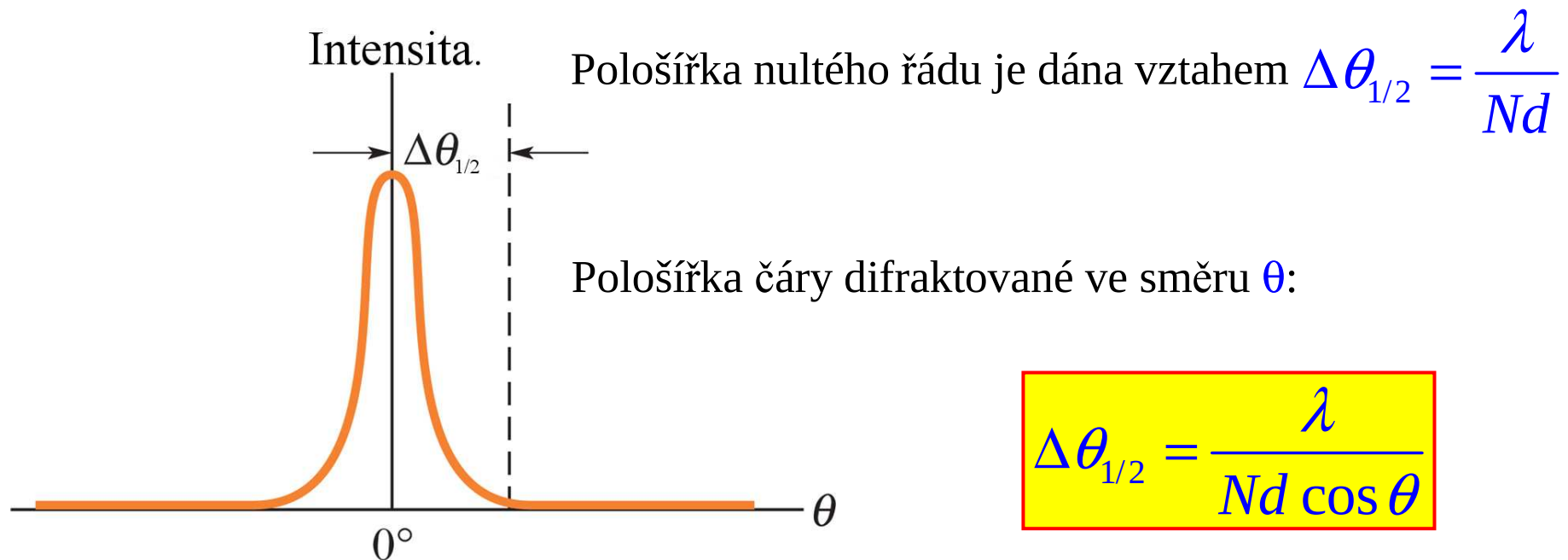
$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Tuto rovnici nazýváme **mřížkovou rovnicí**. Vzdálenost štěrbin d nazýváme **mřížková konstanta**. Závislost polohy interferenčních maxim na vlnové délce je výhodné využít pro analýzu složeného světla. Výsledný interferenční obraz vzniklý difrakcí složeného světla na optické mřížce nazýváme **spektrum**. Interferenční maxima odpovídající světlu různých vlnových délek (emituje-li zdroj světlo diskrétních vlnových délek) pak označujeme jako **spektrální čáry**.



Pološířka difrakční čáry.

Schopnost difrakční mřížky rozlišit spektrální čáry různých vlnových délek souvisí s tzv. pološířkou čar. Pološířku $\Delta\theta_{1/2}$ definujeme jako vzdálenost mezi polohou maxima a sousedního minima interference.



Z uvedeného vztahu je zřejmé, že čára je tím užší, čím je větší počet štěrbin N .

Spektrální disperze, rozlišovací schopnost mřížky.

Důležitým charakteristikou difrakční mřížky je spektrální disperze D a rozlišovací schopnost R .

Spektrální disperze je definována poměrem:

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

kde $\Delta\theta$ je úhlová vzdálenost spektrálních čar lišících se o $\Delta\lambda$.

Z derivace mřížkové rovnice vyplývá pro úhlovou dispersi:

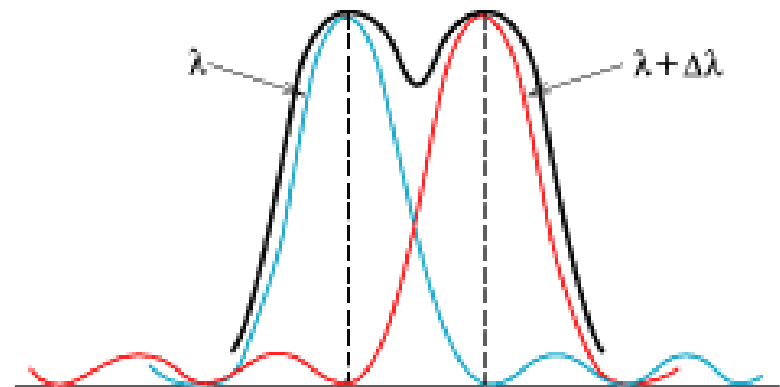
$$D = \frac{m}{d \cos \theta}$$

Rozlišovací schopnost R je udává minimální vzdálenost spektrálních čar $\Delta\lambda$, které lze ještě mřížkou rozlišit. Je definována poměrem:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

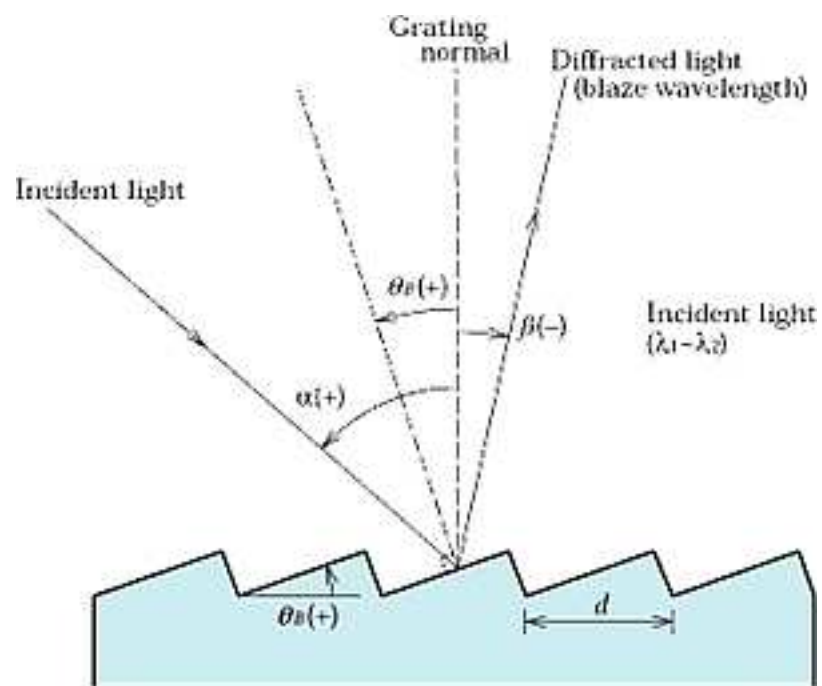
Rozlišovací schopnost mřížky je dána součinem difrakčního řádu m a počtu štěrbin N (vrypů):

$$R = mN$$

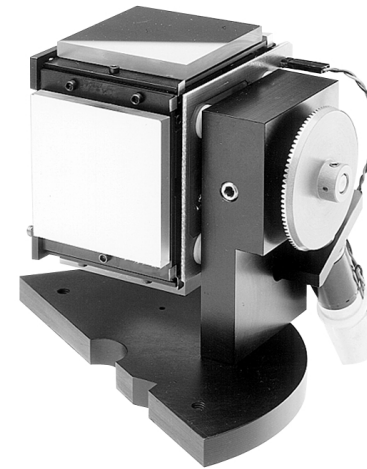
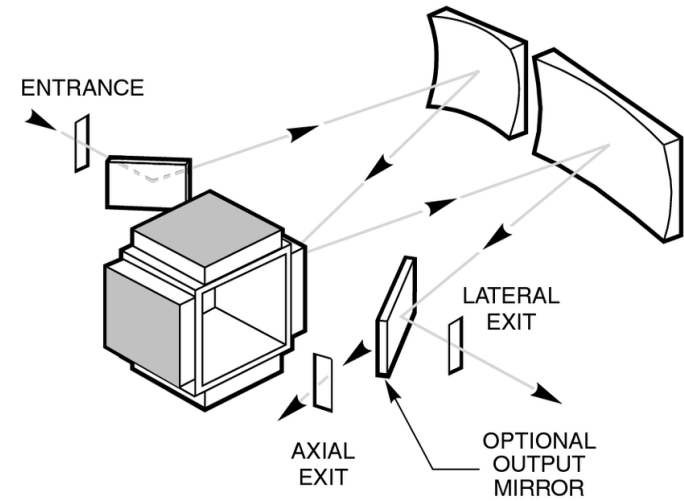
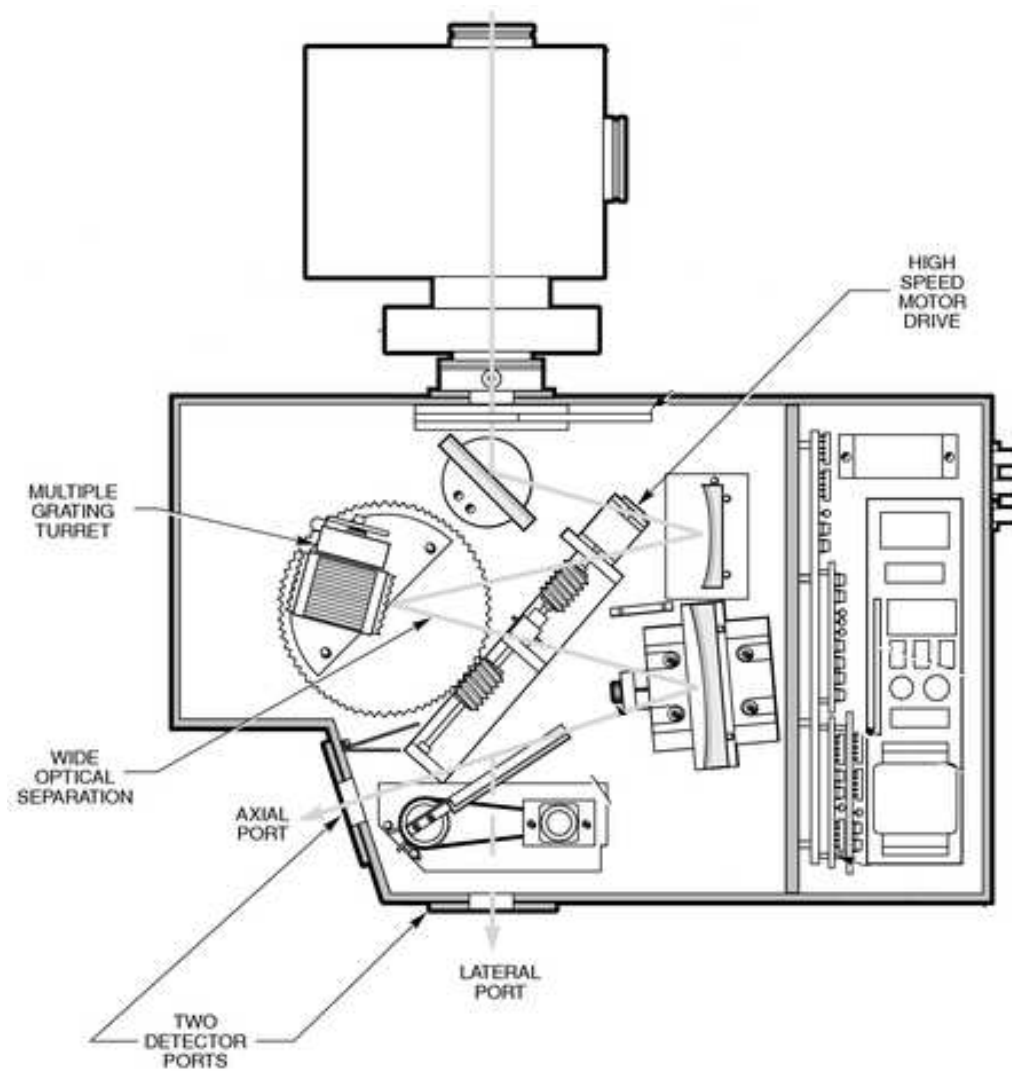


Optika difrakčních mřížky.

Intensita světla difraktovaného mřížkou je rozdělena mezi jednotlivé interferenční řády. Nejvíce světla je soustředěno do nultého řádu. Pro zvýšení intensity světla ve vybraném difrakčním řádu se upravují vrypy mřížek tak, aby maximum světla pro vybranou vlnovou délku bylo difraktováno do určitého difrakčního řádu, typicky do prvního řádu. této úpravě se říká „blejzování“ (en. blazing) a mřížky jsou nazývány „blejzované mřížky“ (en. blazing diffraction grating).

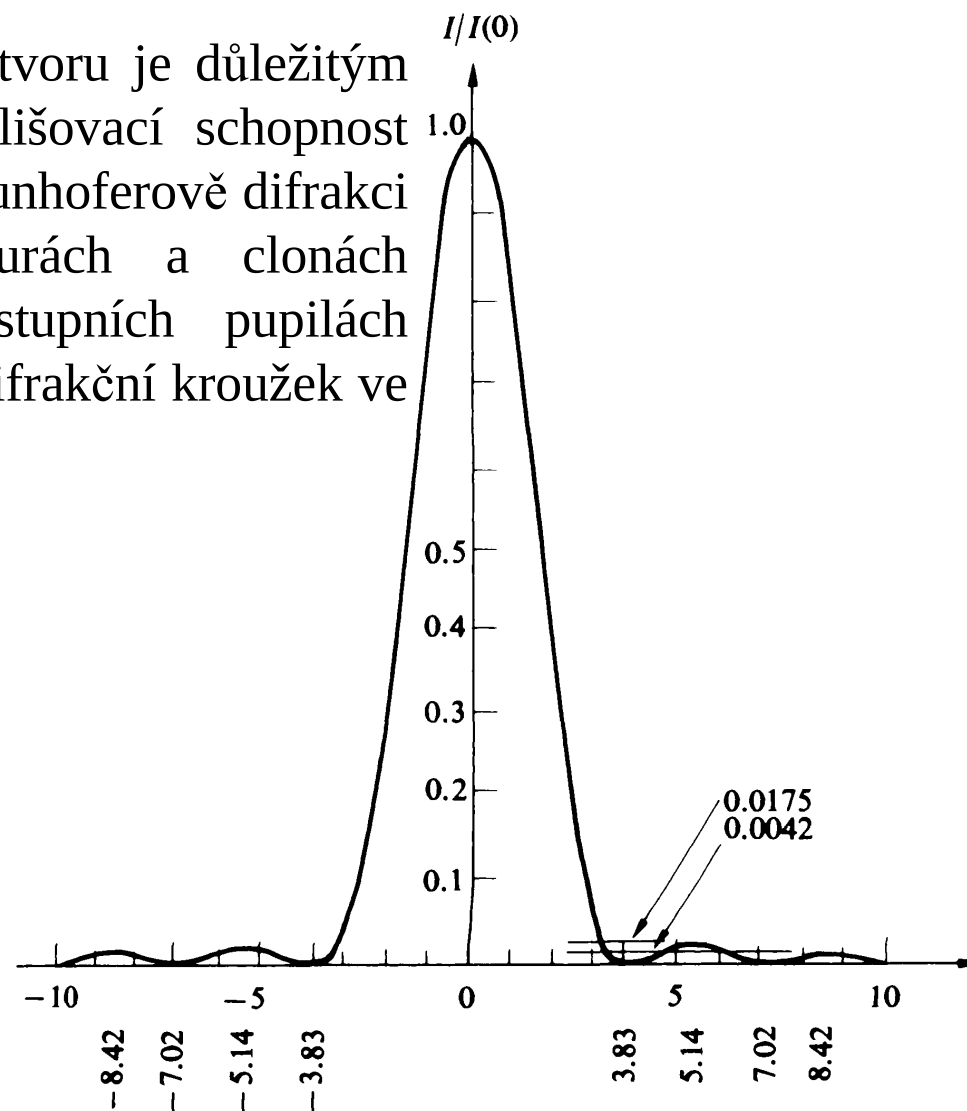
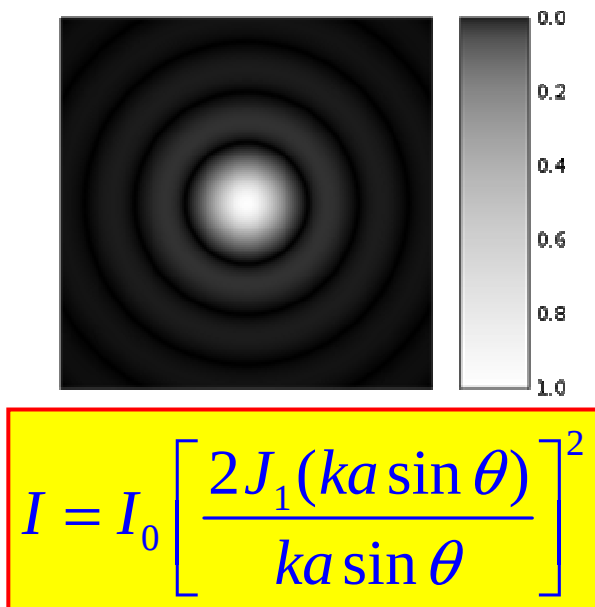


1/4 m Monochromator and Imaging Spectrograph, Oriel MS257.



Difrakce na kruhovém otvoru.

Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru je důležitým případem difrakce, neboť limituje rozlišovací schopnost optických zobrazovacích soustav. K Fraunhoferově difrakci dochází na obrubách čoček, aperturách a clonách dalekohledů a na vstupních a výstupních pupilách mikroskopických objektivů. Intenzivní difrakční kroužek ve středu obrazu nazýváme **Airyho disk**.



Kde a je poloměr kruhové clony, k je velikost vlnového vektoru a J_1 je Besselova funkce.

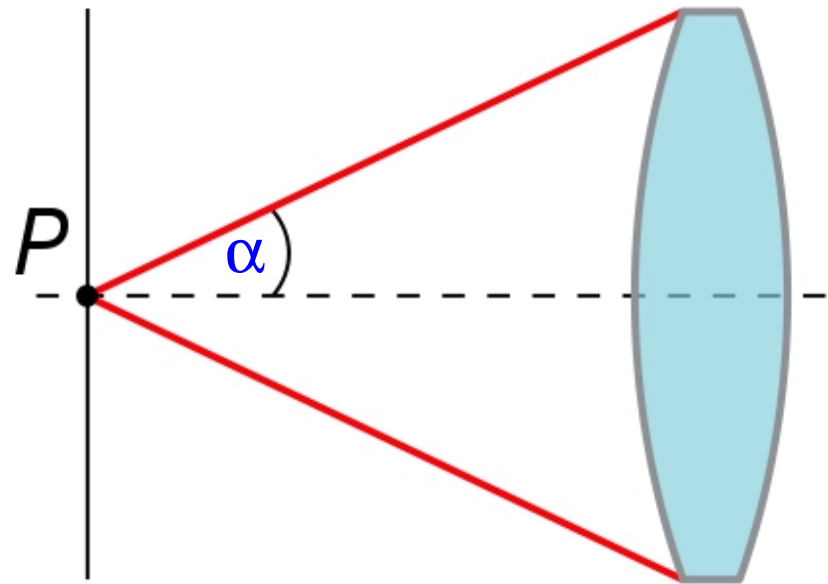
Vstupní a výstupní pupily, clony a apertura.

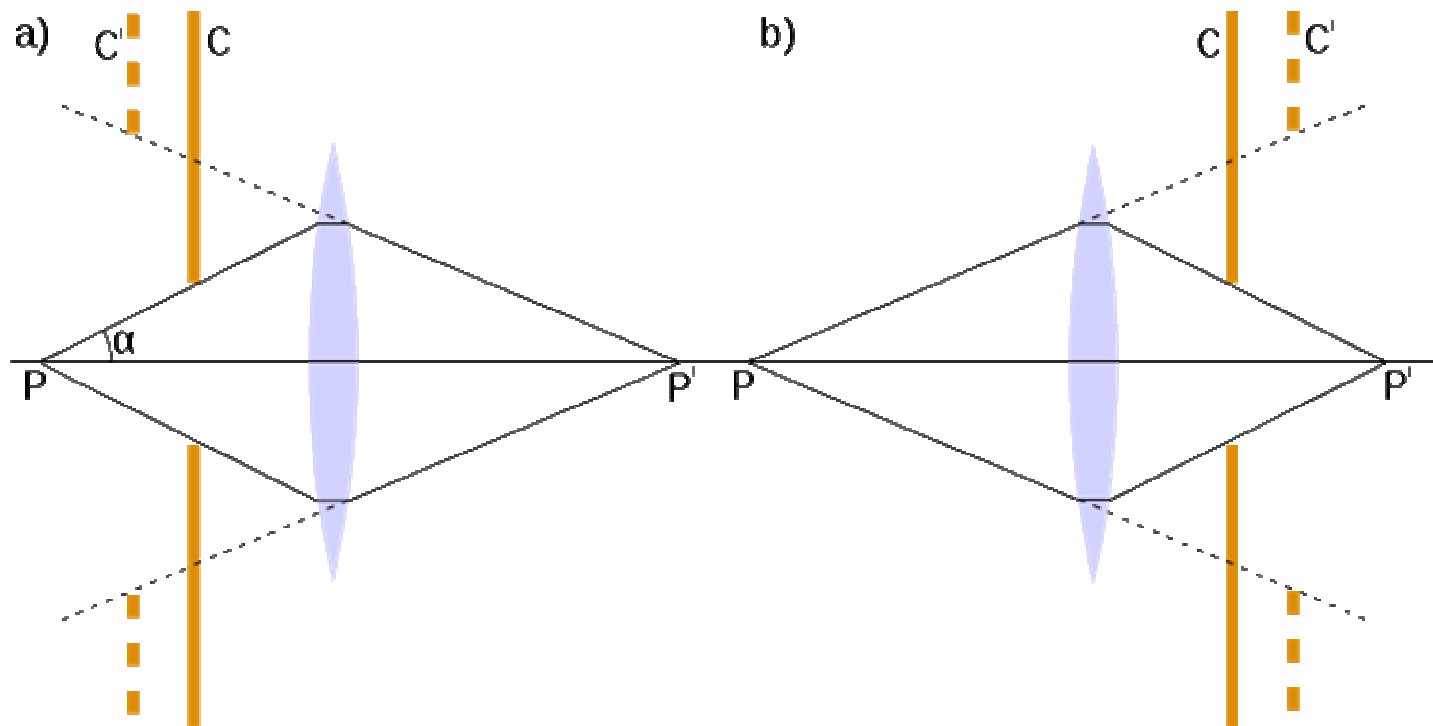
Otvorová clona - vymezuje svazek paprsků zobrazující zvolený předmětový bod optické osy, se nazývá.

Vstupní pupila - obraz otvorové clony vytvořený všemi částmi optické soustavy nacházejícími se před touto clonkou.

Výstupní pupila - obraz otvorové clony, který je tvořen všemi částmi optické soustavy, nacházejícími se za touto clonou. Výstupní pupila je obrazem vstupní pupily, vytvořeným celou optickou soustavou.

Aperturní úhel (zorný úhel) je úhel který svírá svazek paprsků vystupujících z předmětového bodu P na optické ose, a který je omezen vstupní pupilou. Součin indexu lomu a sinu aperturního úhlu nazýváme **numerická apertura N.A.**





a) Clona C , jejíž průměr je menší než průměr objímky čočky, je **otvorovou clonou**, svazek paprsků vycházející z předmětového bodu P na optické ose, který je clonou propuštěný projde celou čočkou. Clona je zde též **vstupní pupilou**. **Výstupní pupilou** je její obraz C' , který je v tomto případě zdánlivý. Z bodu P' se svazek paprsků jeví jako by byl omezen clonou C' .

b) V případě, kdy je clona umístěna za čočkou je otvorová clona C výstupní pupilou a její obraz C' je vstupní pupilou.

Rozlišovací schopnost optické zobrazovací soustavy.

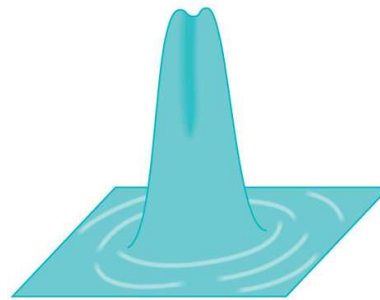
Difrakce na obrubách a aperturách soustavy tedy omezuje zvětšení zobrazovací soustavy a množství detailů, které lze optickou soustavou rozlišit. Místo bodového zobrazení ve smyslu geometrické optiky je soustavou vytvářen ohybový obrazec.

Podmínka rozlišení dvou velmi blízkých bodů je dána **Rayleighovým rozlišovacím kritériem**: Dva body považujeme ještě za rozlišitelné tehdy, spadá-li maximum difrakčního obrace (Airyho disku) do prvního minima difrakčního obrazce sousedního bodu.

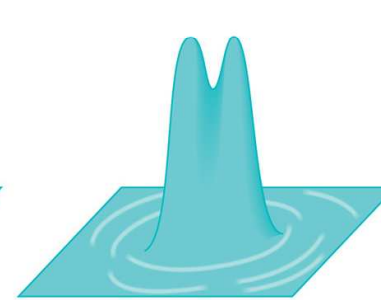
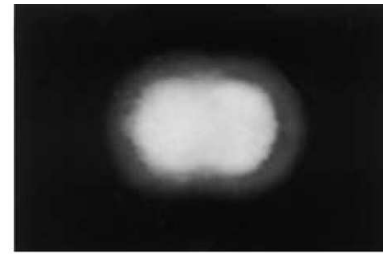
$$\theta_R = \sin^{-1} \left(1.22 \frac{\lambda}{d} \right)$$



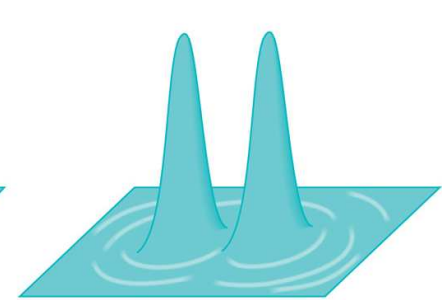
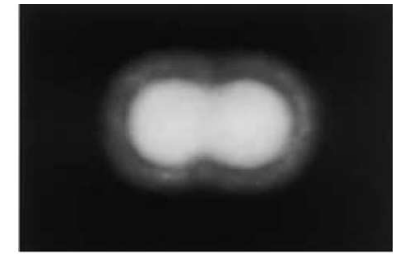
$$\theta_R \approx 1.22 \frac{\lambda}{d}$$



(a)



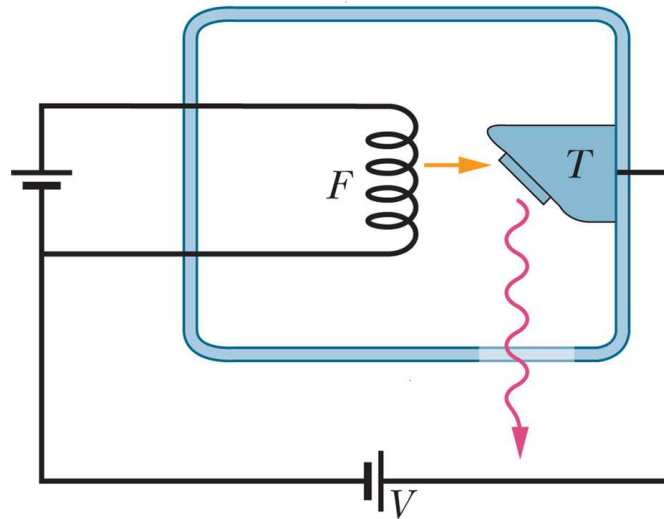
(b)



(c)

Kde d je průměr vstupní apertury a λ je vlnová délka použitého světla.

Difrakce rentgenového záření na periodických strukturách.



Rentgenové záření je emitováno z kovového terčíku po dopadu elektronů urychlených napětím V mezi zdrojem elektronů F a kovovým terčíkem T . Vlnová délka rentgenového záření je v řádech:

$$1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$$

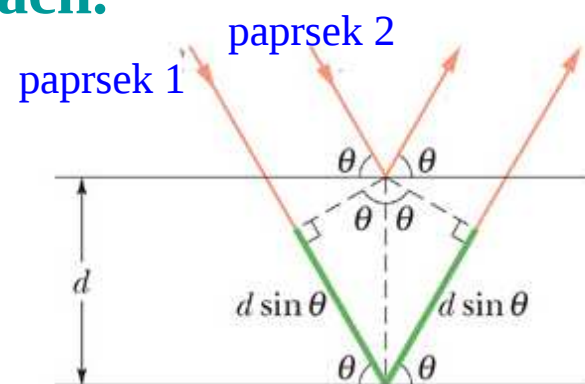
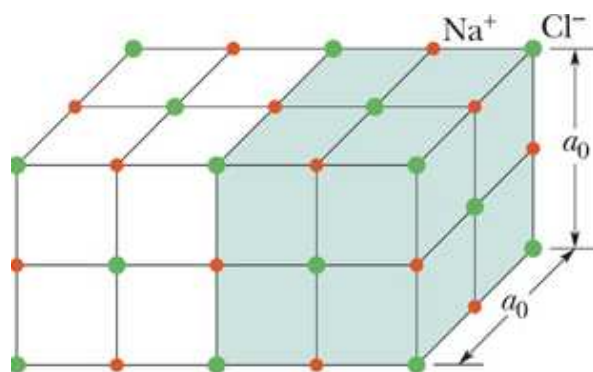
Vlnová délka viditelného světla v řádech: 10^{-7}m

Z mřížkové rovnice vyplývá pro maximum prvního řádu pod úhlem θ pro rentgenové záření $\lambda = 0,1\text{nm}$ a mřížku s mřížkovou konstantou $d = 3000\text{nm}$:

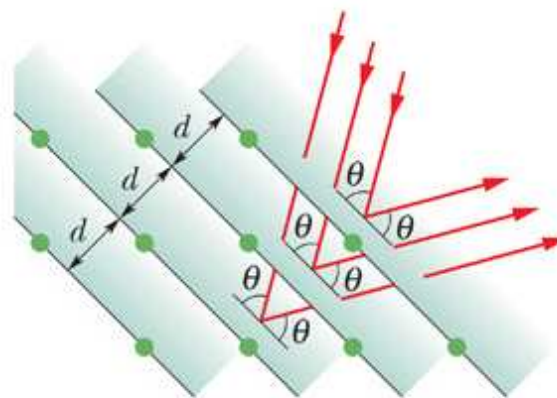
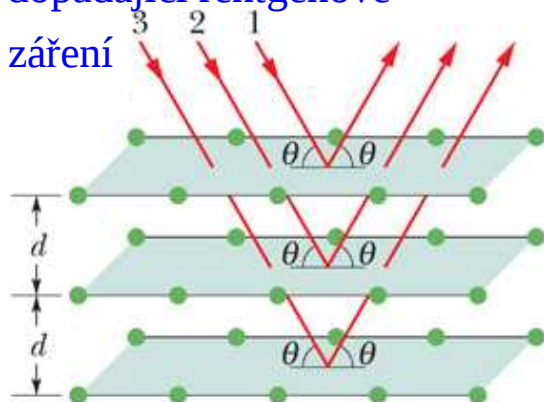
$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(0,1\text{nm})}{(3000\text{nm})} = 0,00003 \rightarrow \theta = 0,0019^\circ$$

To znamená, že k rozlišení různých vlnových délek rentgenového záření nelze použít standardní difrakční mřížku. Pro rozlišení různých vlnových délek rentgenového záření bychom potřebovali mřížku pro níž by platilo $d \doteq \lambda$. Takovou mřížku není možné technicky vyrobit. Podmínku však splňují krystalické periodické struktury.

Difrakce rentgenového záření na periodických strukturách.



dopadající rentgenové
záření



Podmínka pro vznik interferenčních maxim je dána Braggovým zákonem:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$