



Optické zobrazení.

Přednášející:

RNDr. František Adamec, CSc.

Ústav fyziky a biofyziky JČU v Českých Budějovicích

Na základě učebnic:

Halliday, Resnick

Fundamentals of Physics 8th Edition, Wiley 2005

Feynman, Leighton, Sands

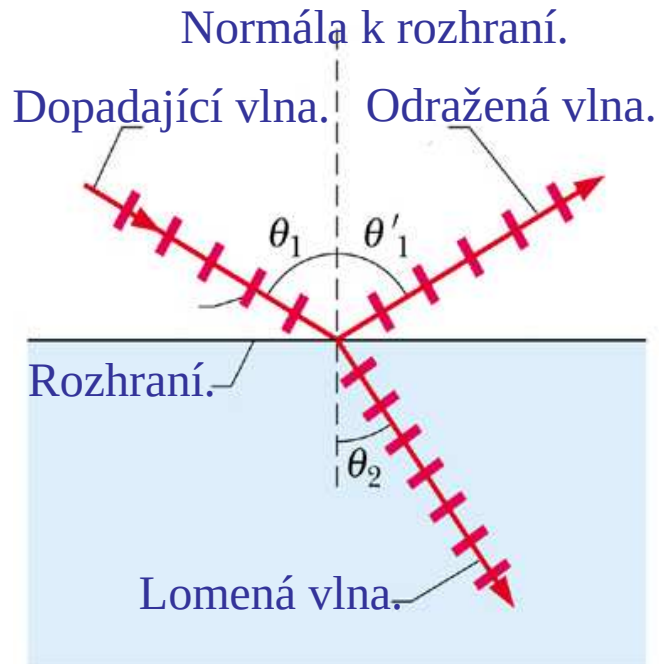
Feynmanovy přednášky z fyziky

Fragment 2000

Eugene Hecht, Optics 4th edition

Odraz a lom světla.

Po dopadu světelné vlny na rozhraní dvou různých prostředí, dochází jednak k odrazu světelné vlny na rozhraní a jednak k lomu světelné vlny procházející rozhraním. Pro odraženou a lomenou vlnu platí zákony:



Zákon odrazu světla: $\theta'_1 = \theta_1$

Snellův zákon lomu světla:

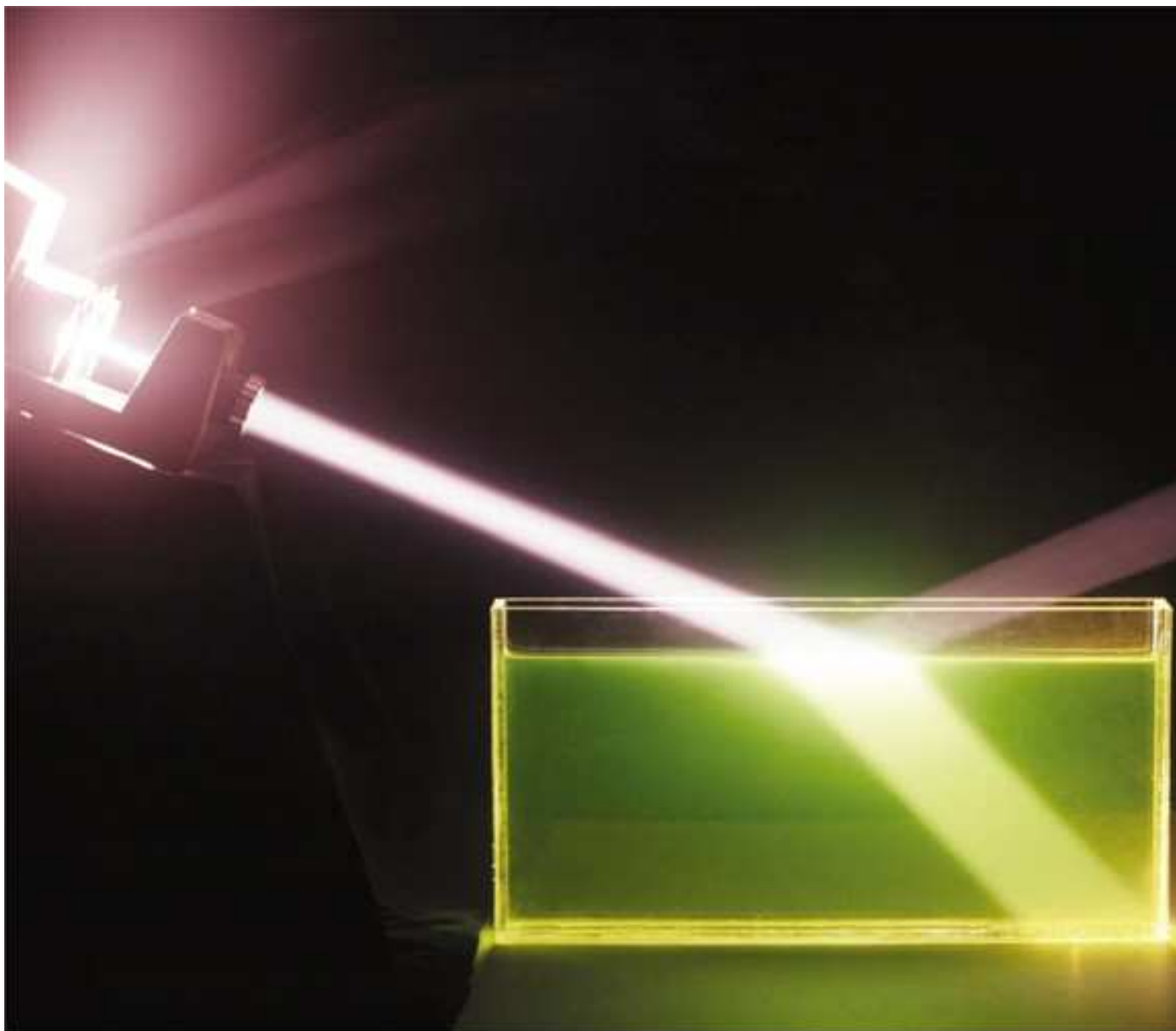
$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

n_1 a n_2 jsou fyzikální charakteristikou prostředí z hlediska šíření světla v prostředí. Nazýváme je **index lomu** prostředí.

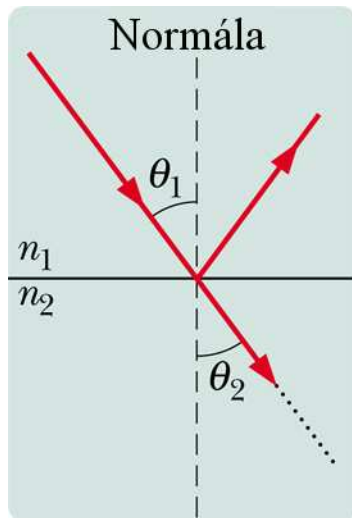
Index lomu n prostředí je definován poměrem rychlosti světla ve vakuu c a rychlosti světla v daném prostředí u .

$$n = \frac{c}{u}$$

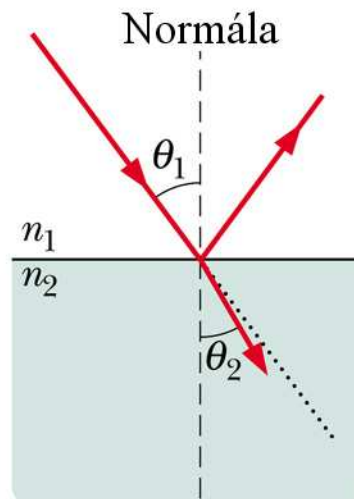
Odraz a lom světla.



Odraz a lom světla.



$n_2 = n_1$
(a)



$n_2 > n_1$
(b)

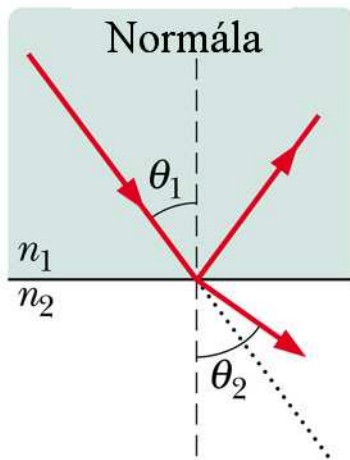
Pro světlo vstupující z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí o indexu lomu n_2 platí:

a) $n_2 = n_1 \rightarrow \theta_2 = \theta_1$

b) $n_2 > n_1 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$, lom k normále (kolmici).

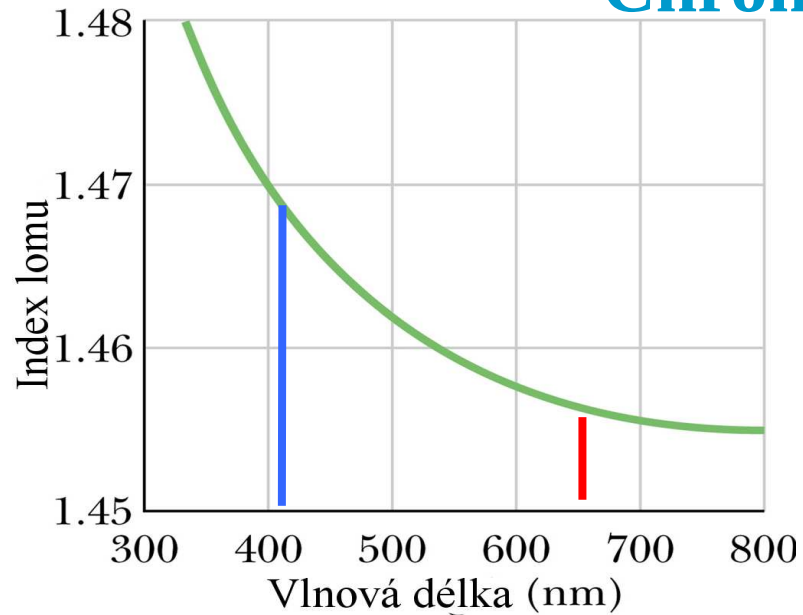
c) $n_2 < n_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$, lom od normály (kolmici).

Prostředí o větším indexu lomu bývá označováno jako **opticky hustší** než prostředí o nižším indexu lomu, které bývá označováno jako **opticky řidší**.



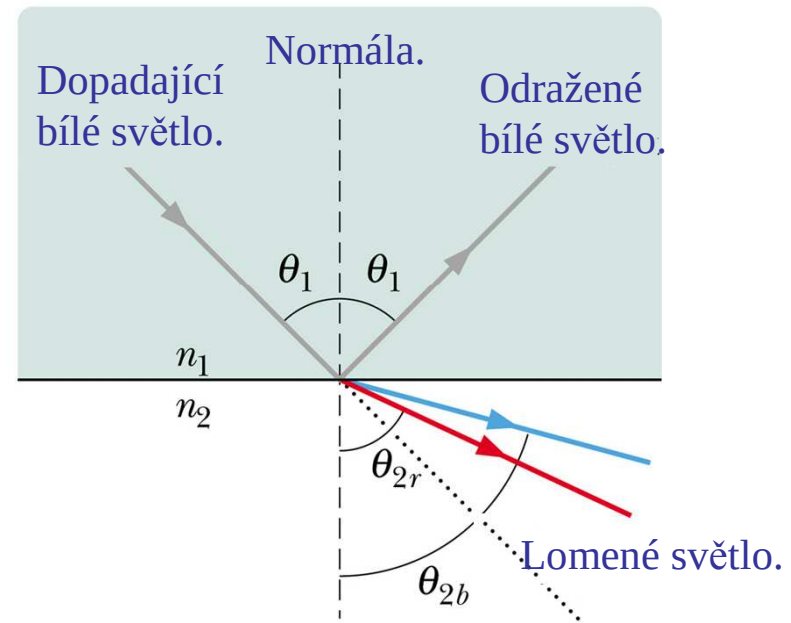
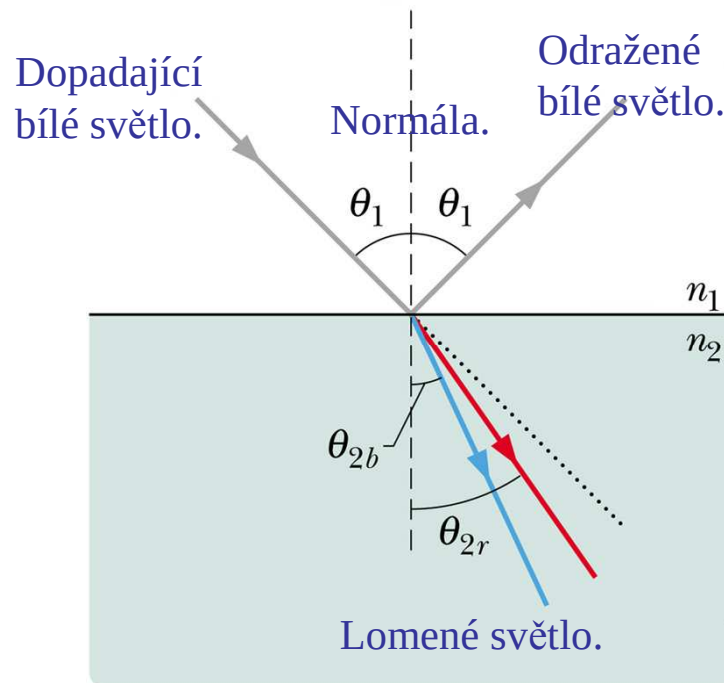
$n_2 < n_1$
(c)

Chromatická disperze.



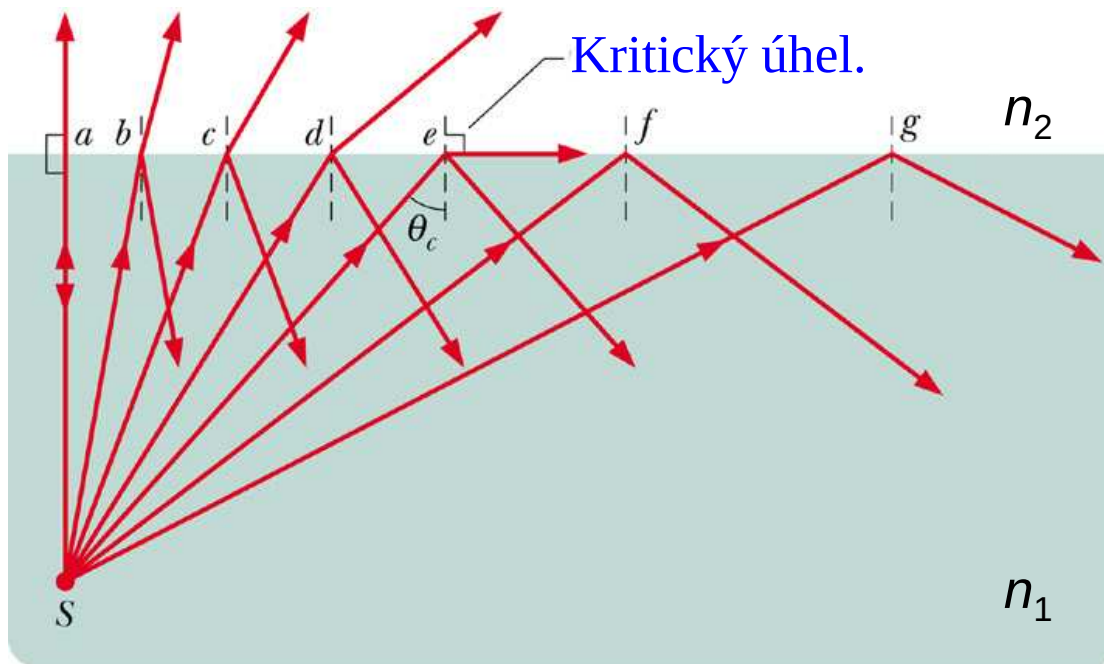
Index lomu obecně závisí na vlnové délce elektromagnetické vlny. Tuto závislost nazýváme **chromatická disperze**.

$$n_{2, \text{modrá}} > n_{2, \text{červená}}$$



Totální odraz.

Vstupuje-li světlo z prostředí o vyšším indexu lomu do prostředí o nižším indexu lomu, $n_1 > n_2 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$, pak vzrůstá-li úhel dopadu θ_1 , pak při určité hodnotě úhlu dopadu bude úhel lomu θ_2 roven 90° , tento úhel dopadu nazýváme **kritický úhel** θ_c . Po překročení hodnoty kritického úhlu se EM vlna nešíří do prostředí nižšího indexu lomu a odráží se zpět do prostředí vyššího indexu lomu, tento jev nazýváme **totální odraz (reflexe)**.

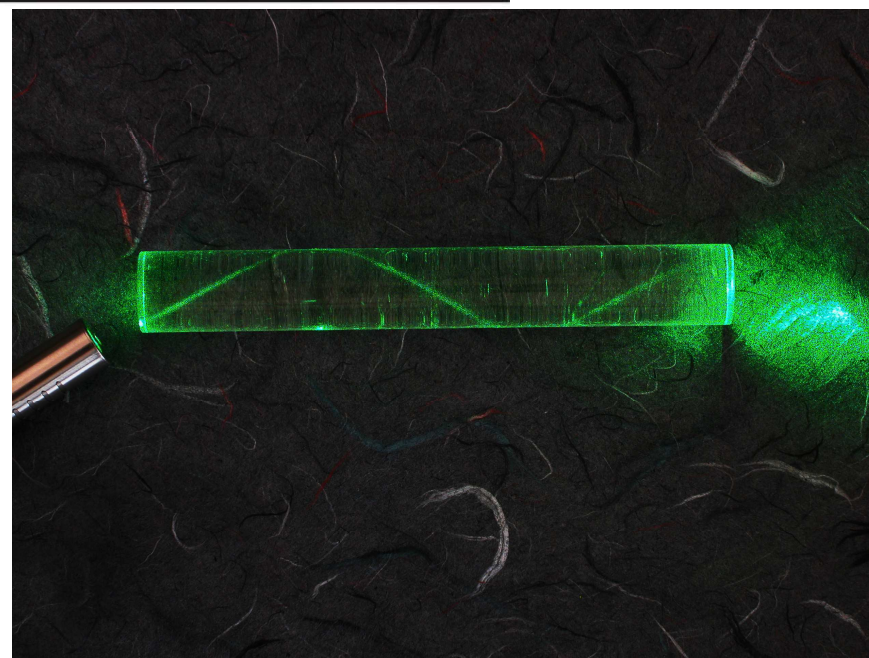
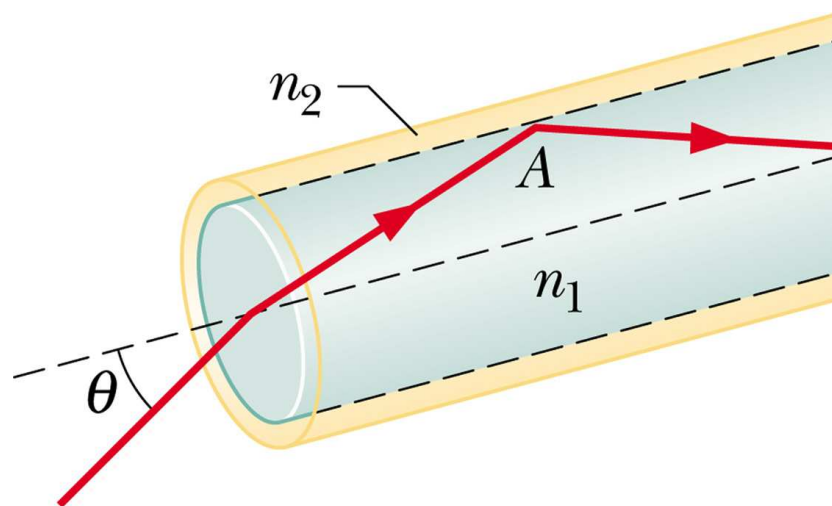


$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2$$

Kritický úhel:

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

Totální odraz.



Fermatův princip.



Pierre de Fermat

(17. srpna 1601 Beaumont-de-Lomagne –
12. ledna 1665 Castres)

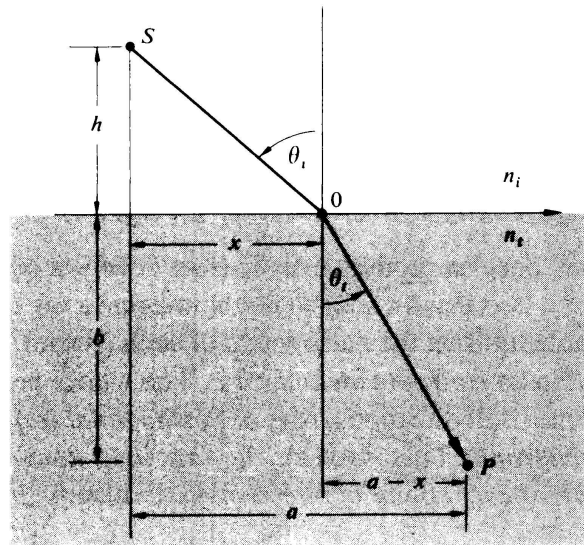
Velká Fermatova věta

Neexistují přirozená čísla x , y , z a n ,
pro která $x^n + y^n = z^n$, kde $n > 2$ a $x, y,$
 $z \neq 0$.

Dokázal v roce 1994:



Sir Andrew John Wiles (11. 3. 1953
Cambridgi)



Fermatův princip.

Optická dráha po níž se světlo šíří z místa S do místa P je taková, že doba nutná k překonání vzdálenosti SP je minimální.

Fermatův princip – lom světla.

Čas t který světlo potřebuje k překonání vzdálenost mezi místem S v prostředí o indexu lomu n_i a místem P v prostředí o indexu lomu n_t :

$$t = \frac{\overline{SO}}{u_i} + \frac{\overline{OP}}{u_t} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{u_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{u_t}$$

Z podmínky minima:
$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{u_i \sqrt{h^2 + x^2}} + \frac{-(a-x)}{u_t \sqrt{b^2 + (a-x)^2}} = 0$$

vyplývá Snellův zákon:
$$\frac{\sin \theta_i}{u_i} = \frac{\sin \theta_t}{u_t}$$

Fermatův princip.

V případě, že paprsek prochází n různými vrstvami s různými indexy lomu:

$$t = \frac{s_1}{u_1} + \frac{s_2}{u_2} + \dots + \frac{s_n}{u_n} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{u_i}$$

kde s_i je dráha paprsku v i -té vrstvě, u_i je rychlost světla v i -té vrstvě. Rovnici upravíme do tvaru:

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n \frac{c}{u_i} s_i = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n n_i s_i$$

Součet nazýváme optickou dráhou OPL:

$$OPL = \sum_{i=1}^n n_i s_i$$

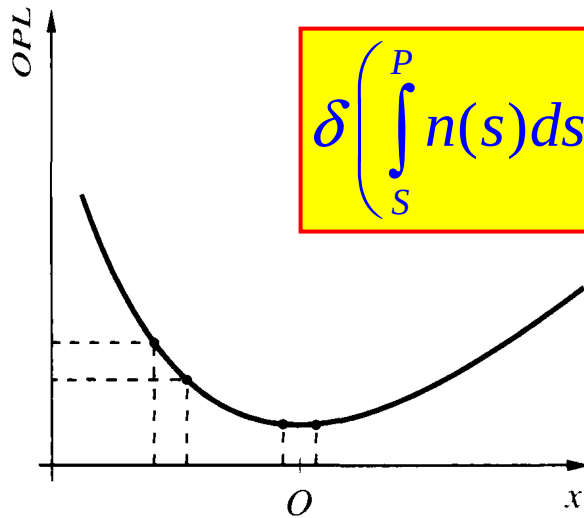
Je-li prostředí nehomogenní, tedy index lomu n je závislý na poloze pak je OPL dána vztahem:

$$OPL = \int_S^P n(s) ds$$

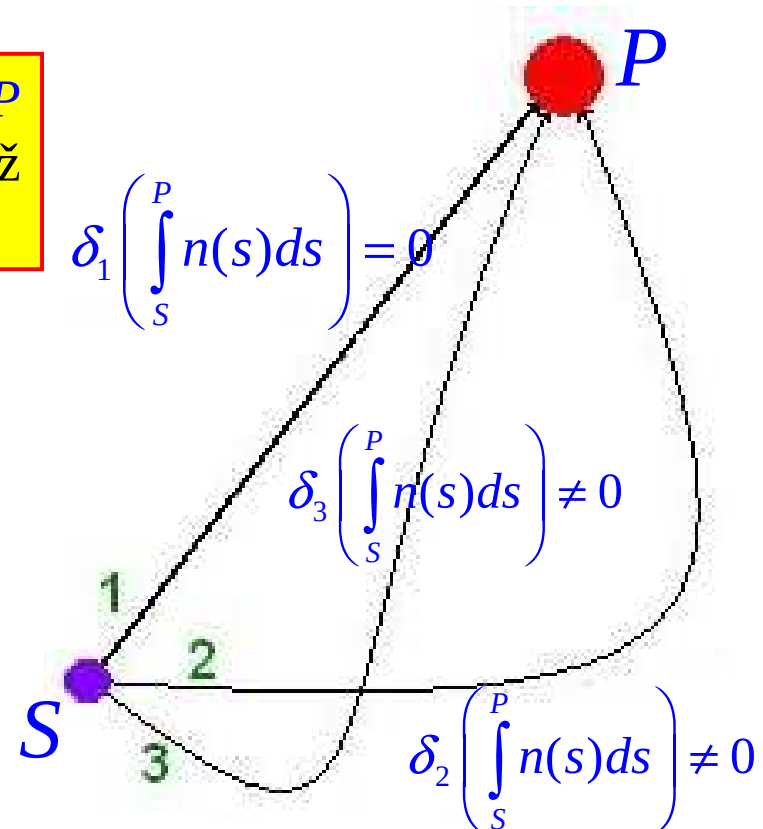
Fermatův princip.

Formulace Fermatova principu ve tvaru v němž se požaduje podmínka minimálního času nutného k překonání dráhy není úplně přesná (neplatí například v okolí velmi hmotných objektů – gravitačních čoček). Správná formulace Fermatova principu vyžaduje, aby dráha po níž se světlo šíří byla stacionární, to znamená že funkce křivky dráhy má v bodě v němž je podmínka stacionarity splněna má buď minimum, maximum nebo inflexní bod.

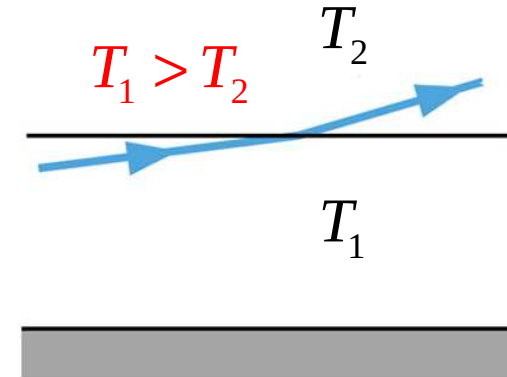
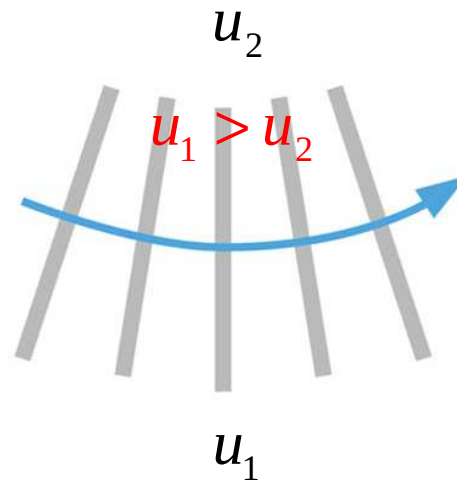
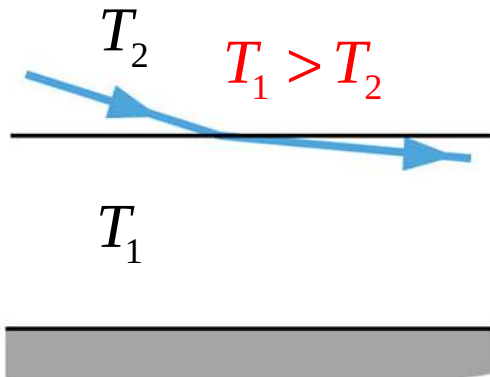
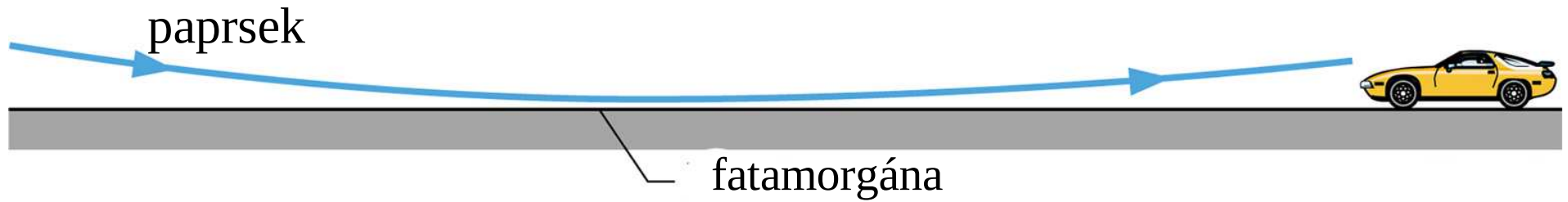
Světelný paprsek šířící se z bodu S do bodu P prochází po takové optické dráze OPL, pro níž platí, že její variace je rovna nule:



$$\delta \left(\int_S^P n(s) ds \right) = 0$$

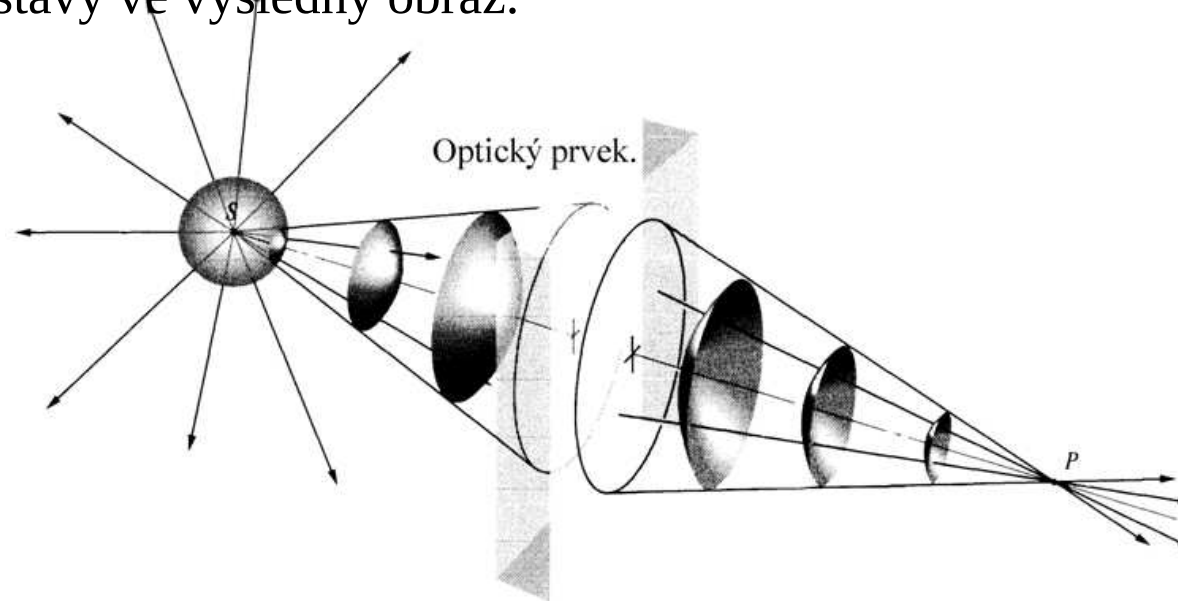


Fermatův princip a fatamorgána.



Optické zobrazení.

Zobrazovacím prvkem (zobrazovací soustavou) rozumíme lámavou nebo odraznou plochu, která mění definovaným způsobem dráhu světelného paprsku. Optickým zobrazováním pak rozumíme transformaci světelných paprsků vstupujících do optické zobrazovací soustavy ve výsledný obraz.

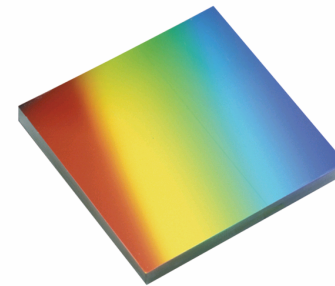
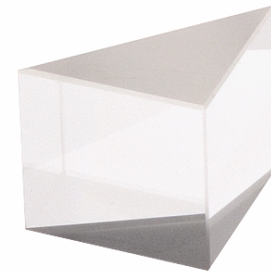


Paprsky vycházející z bodového zdroje **S** jsou optickým prvkem zobrazeny do bodu **P**. Prostor je optickým prvkem (optickou soustavou) rozdělen na část předmětovou a část obrazovou. Zobrazované body leží v **předmětové rovině**, zobrazené body v **rovině obrazové**. Předmět a obraz bodu jsou vzájemně **konjugovány**.

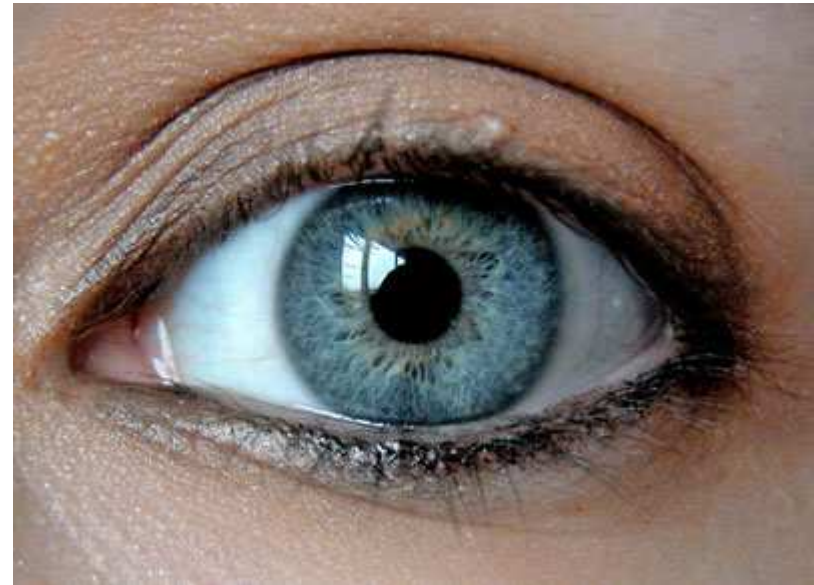
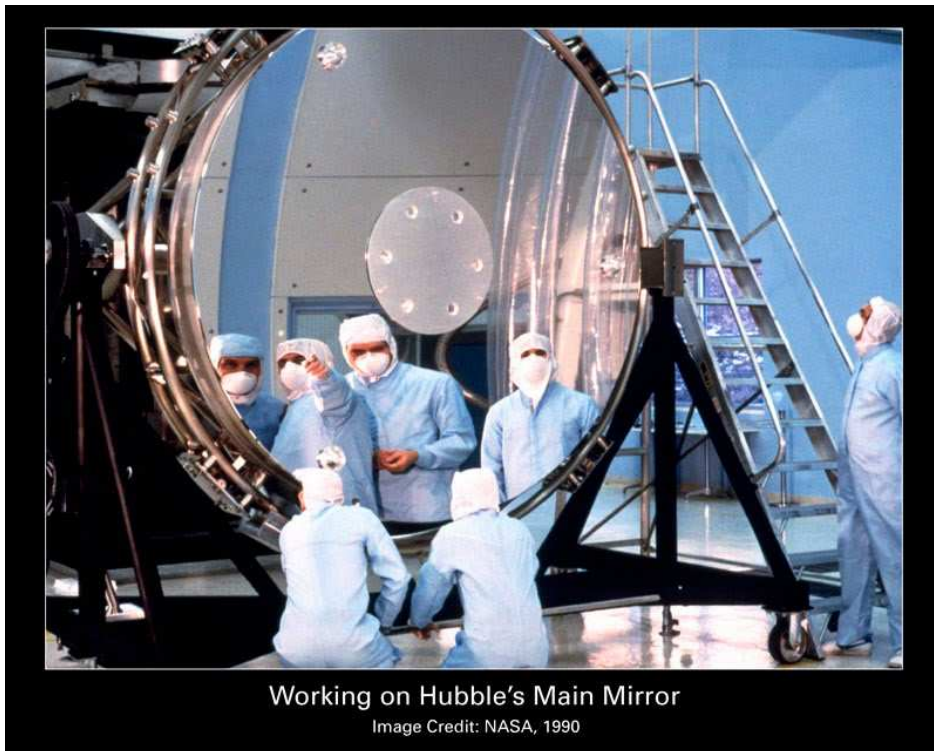
Ideální zobrazení je **bodové**, to znamená, že zobrazovaný bod se zobrazí opět na bod.

Zobrazovací prvky.

Běžné optické zobrazovací prvky jsou, **čočky** (sférické, asférické, válcové), **hranoly**, **zrcadla**, **děliče svazku**, **optické mřížky**, různé složitější kombinace uvedených prvků:



Zobrazovací prvky.



Základní axiomy optického zobrazení.

Světlo se šíří homogenním a isotropním prostředím přímočaře.

Světelné paprsky se šíří nezávisle na sobě.

Prochází-li světlo rozhraním dvou různých optických prostředí, pak se řídí Snellovým zákonem lomu.

Platí zákon odrazu a lomu.

Směr průchodu paprsku optickou zobrazovací soustavou lze obrátit.

Světlo se šíří ve shodě s Fermatovým principem.

Základní pojmy.

Zobrazovaný objekt nazýváme **předmět**, leží v **předmětovém prostoru**.

Obraze předmětu leží v **obrazovém prostoru**.

Světelný svazek vycházející z předmětu je **homocentrický** a je zobrazován optickou zobrazovací soustavou opět na **homocentrický svazek**.

Zobrazení je **bodové**, to znamená, že zobrazovací soustava transformuje bod opět na bod – zobrazení je **stigmatické**.

Zobrazovací soustava vytváří buď **skutečný (reálný) obraz** nebo **neskutečný obraz**.

Při zobrazení se omezuje na **paraxiální svazky paprsků**, paprsky ležícími blízko **optické osy**.

Optická osa je myšlená přímka procházející geometrickými středy optických prvků soustavy, je jejich osou souměrnosti.

Algebraická znaménka úhlů a souřadnic se řídí **znaménkovou konvencí**.

Znaménková konvence.

Kladné jsou všechny dráhy a úsečky odměřované od vztažného bodu optické soustavy ve směru šíření světelných paprsků a od vztažného bodu směrem nahoru. Úhly mají kladné znaménko, pokud postupujeme od jednoho vztažného ramene proti směru hodinových ručiček. V opačném případě je znaménko záporné.

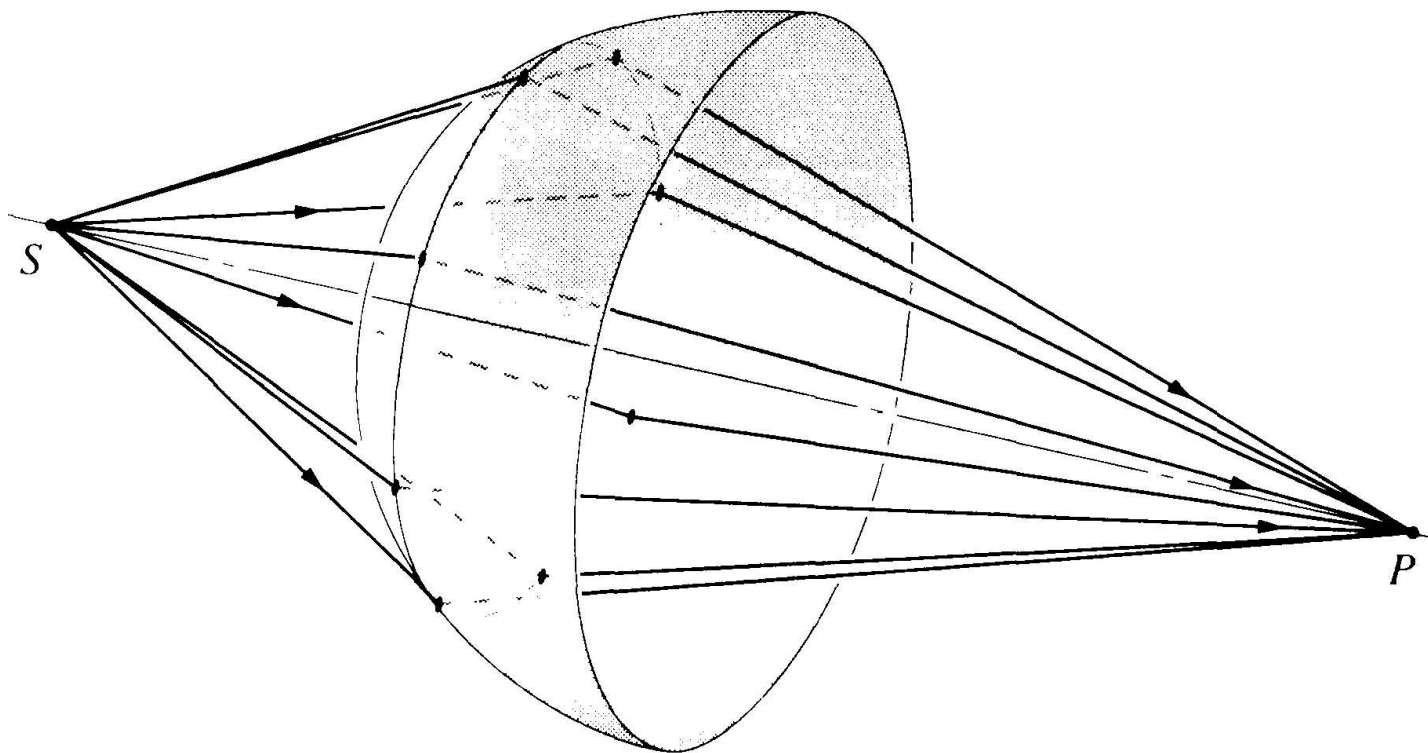
Schémata se zakreslují tak, že se světlo šíří z levé strany doprava, po odraze od zrcadel se však může šířit i směrem opačným.

Vzdálenosti se zobrazují orientovanými úsečkami.

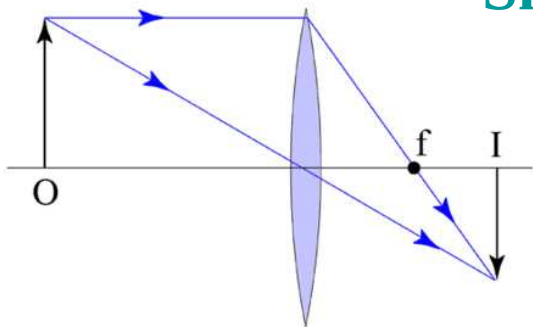
Vztažnými body jsou:

- pro kulové plochy body na ploše (poloměr křivosti je orientován od bodu na ploše do středu křivosti plochy).
- pro ohniskové vzdálenosti příslušné hlavní body (ohnisková vzdálenost je orientována od hlavního bodu k ohniskovému bodu)
- pro souřadnice bodů jsou počátky souřadných systémů buď hlavní body nebo ohniska.
- souřadnice v souřadném systému spojeném s hlavními body se značí malými písmeny abecedy, v souřadném systému spojeném s ohnisky velkými písmeny abecedy.

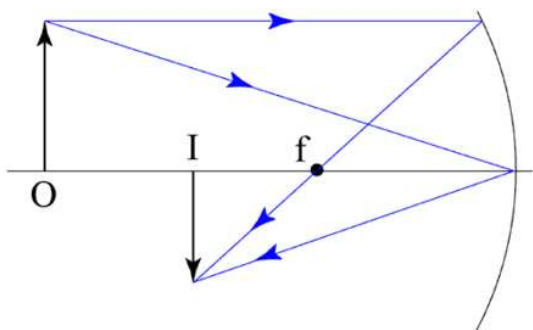
Homocentrický svazek paprsků.



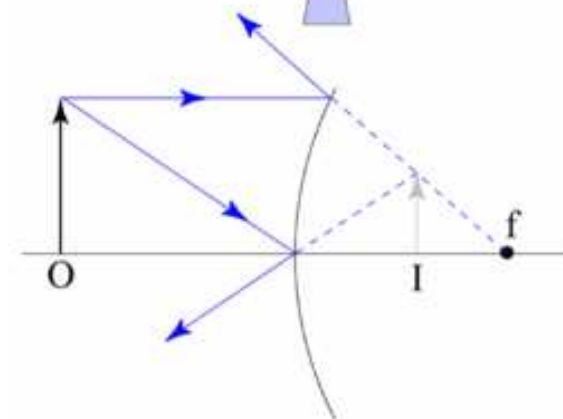
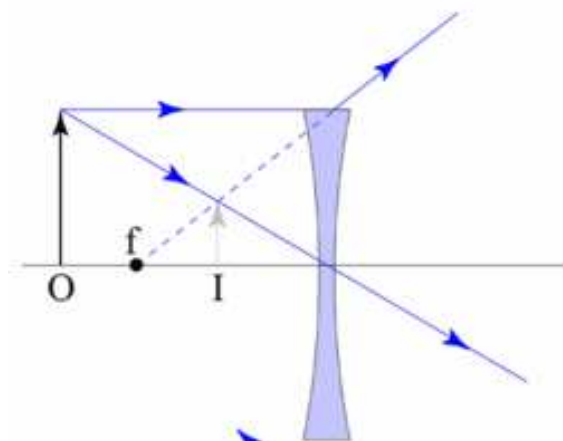
Skutečný a zdánlivý obraz.



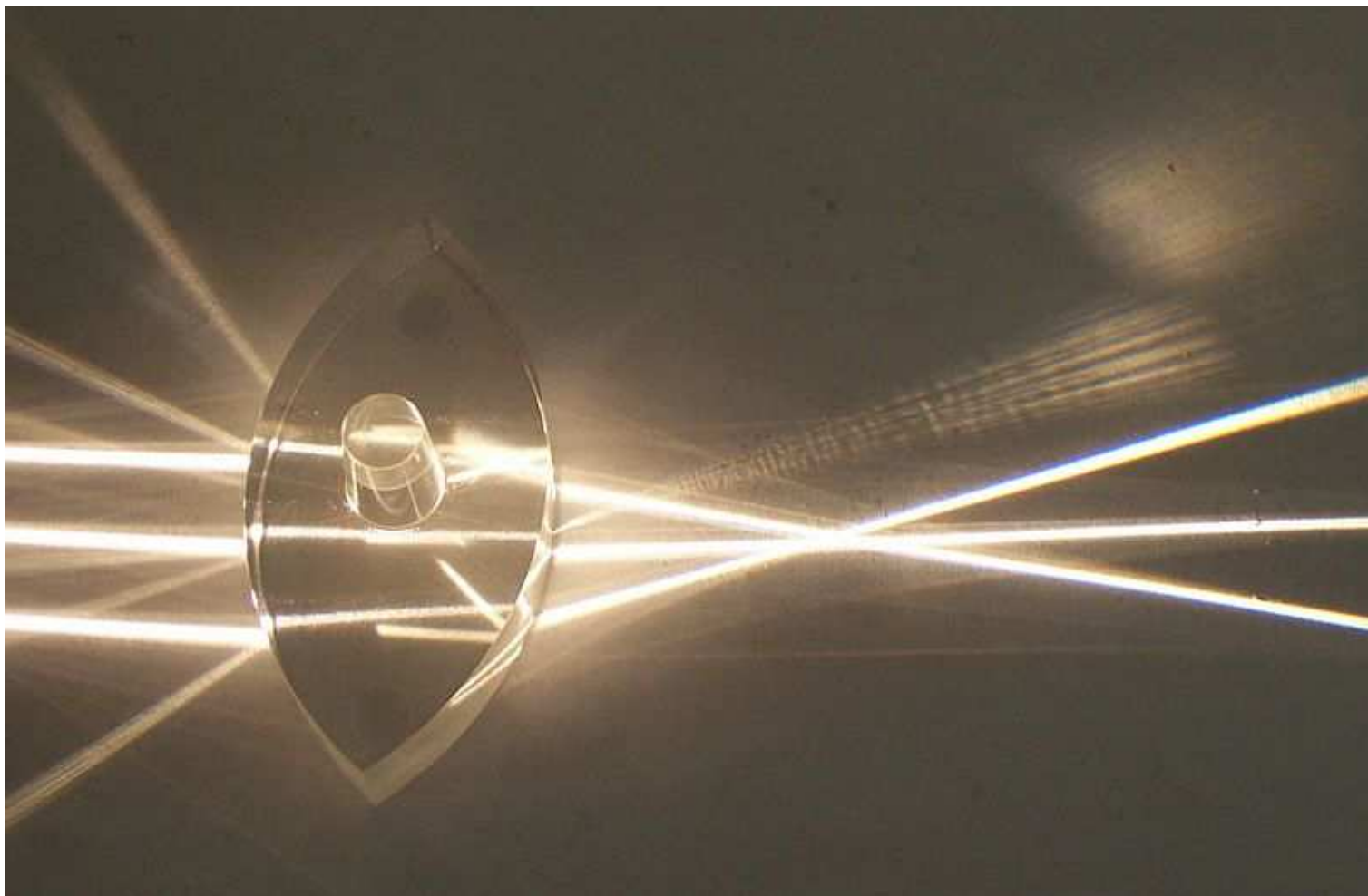
Skutečný obraz: Paprsky se protínají v obrazovém prostoru.



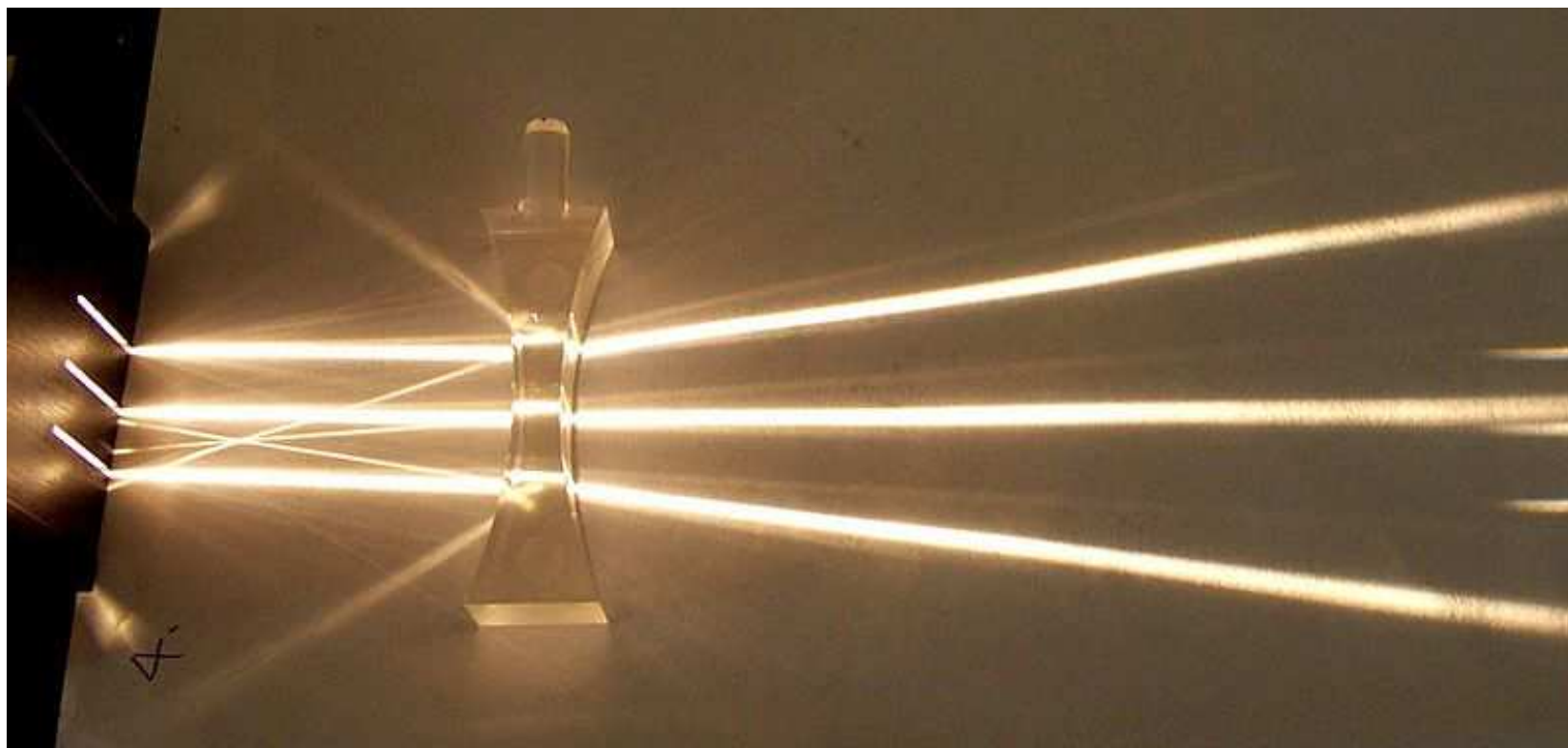
Zdánlivý obraz: Paprsky vystupující ze zobrazovací soustavy jsou v obrazovém prostoru divergentní. Tedy se nikdy neprotnou. Obraz lze vytvořit jejich prodloužením do předmětového prostoru, kde vytvoří zdánlivý (virtuální) obraz.



Konvergující paprsky.



Divergující paprsky.



Zvětšení.

Příčné (laterální) zvětšení: $\beta = \frac{y'}{y}$

kde y je příčná velikost předmětu, y' je příčná velikost obrazu.

Podélné (axiální) zvětšení: $\alpha = \frac{x'}{x}$

kde x je podélná vzdálenost předmětu od vztažného bodu, x' je podélná vzdálenost obrazu od vztažného bodu.

Úhlové zvětšení: $\alpha = \frac{\sigma'}{\sigma}$

kde σ a σ' jsou úhly, které svírají sdružené paprsky s optickou osou.

Význačné body optického zobrazení.

Pro konstrukci obrazu jsou důležité tzv. význačné (kardinální) body a význačné (kardinální) roviny optické zobrazení:

Hlavní body (předmětový a obrazový) jsou definovány jako dvojice sdružených bodů na optické ose, pro které je příčné zvětšení $\beta = 1$. Hlavními body prochází hlavní roviny, které jsou kolmé k optické ose soustavy.

Uzlové body (předmětový a obrazový) jsou definovány jako dvojice sdružených bodů na optické ose, pro které je úhlové zvětšení $\alpha = 1$. Uzlovými body prochází uzlové roviny, které jsou kolmé k optické ose soustavy.

Předmětové ohnisko f je bod ležící na optické ose v předmětovém prostoru, jehož obraz leží v nekonečnu.

„Obrazové ohnisko f' “ je bod na optické ose, který je obrazem bodu ležícího v předmětovém prostoru v nekonečné vzdálenosti od optické soustavy.

Ohniskovými body prochází ohniskové roviny, které jsou kolmé k optické ose soustavy.

Zobrazení lámavou sférickou plochou.

Snellův zákon pro malé úhly

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$$

Z obrázku dostaneme:

$$\theta_1 = -\alpha + \beta \quad \text{a} \quad \theta_2 = \beta - \gamma$$

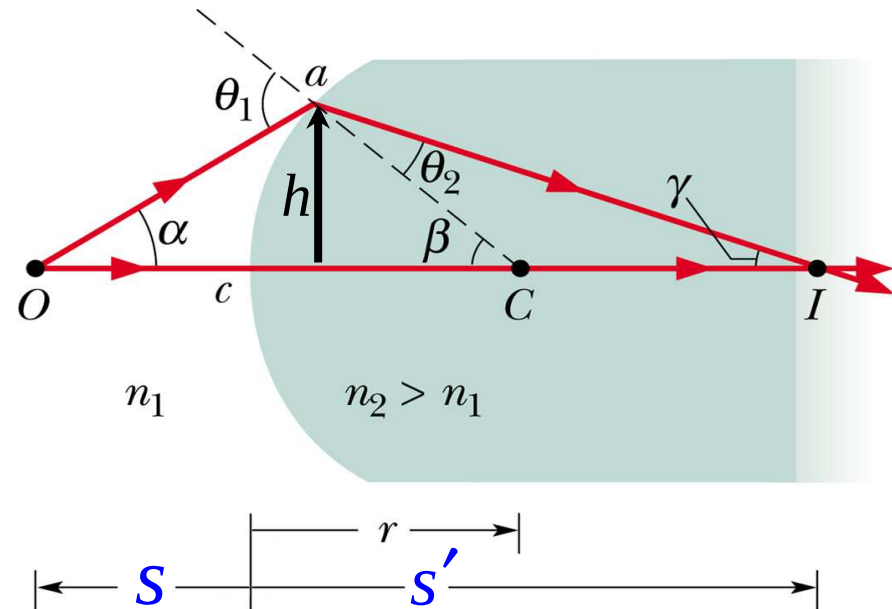
$$n_1 (-\alpha + \beta) = n_2 (\beta - \gamma)$$

Dosazením za úhly:

$$\alpha \approx \frac{\widehat{ac}}{s}; \quad \beta = \frac{\widehat{ac}}{r}; \quad \gamma \approx \frac{\widehat{ac}}{s'}$$

Dostaneme vztah, Abbeův invariant:

$$n_1 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n_2 \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right)$$



Ohniskem zobrazovacího prvku nazýváme bod na optické ose, který je obrazem bodu ležícího v nekonečnu. V předmětové rovině leží **předmětové ohnisko**, jeho obraz leží v nekonečnu, v obrazové rovině leží **obrazové ohnisko**, které je obrazem bodu ležícího v nekonečnu.

Z rovnice:
$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{r}$$
 dostaneme:

Obraz bodu v $s \rightarrow \infty$:
$$s'_F = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$$

Obraz bodu v $s' \rightarrow \infty$:
$$s_F = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2}$$

Obrazové ohnisko je definováno vzdáleností od obrazového hlavního bodu:

$$f' = s'_F - s'_H$$

Předmětové ohnisko je definováno vzdáleností od předmětového hlavního bodu:

$$f = s_F - s_H$$

Pro lom na kulové ploše platí: $s_H = s'_H = 0$

Potom pro předmětová a obrazová ohniska platí vztahy:

$$f = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2}$$

$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$$

Pomocí vztahů pro ohniskové vzdálenosti přepíšeme rovnici pro Abbeův invariant:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

Vzdálenosti s a s' měřené od vrcholu lámavé plochy jsou v případě lomu na kulové ploše rovny vzdálenostem měřeným od hlavních bodů a a a' .

Gaussův tvar zobrazovací rovnice: $\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$

Zobrazovací rovnice lze přepsat pomocí vzdáleností měřených v souřadnicových soustavách spojených s ohniskovými body:

$$a = f + z \quad a' = f' + z'$$

Vzdálenosti z a z' jsou měřené od ohniskových vzdáleností. Dosazením do Gaussova tvaru zobrazovací rovnice dostaneme Newtonovy zobrazovací rovnice:

$$zz' = ff'$$

$$\beta = -\frac{f}{z}$$

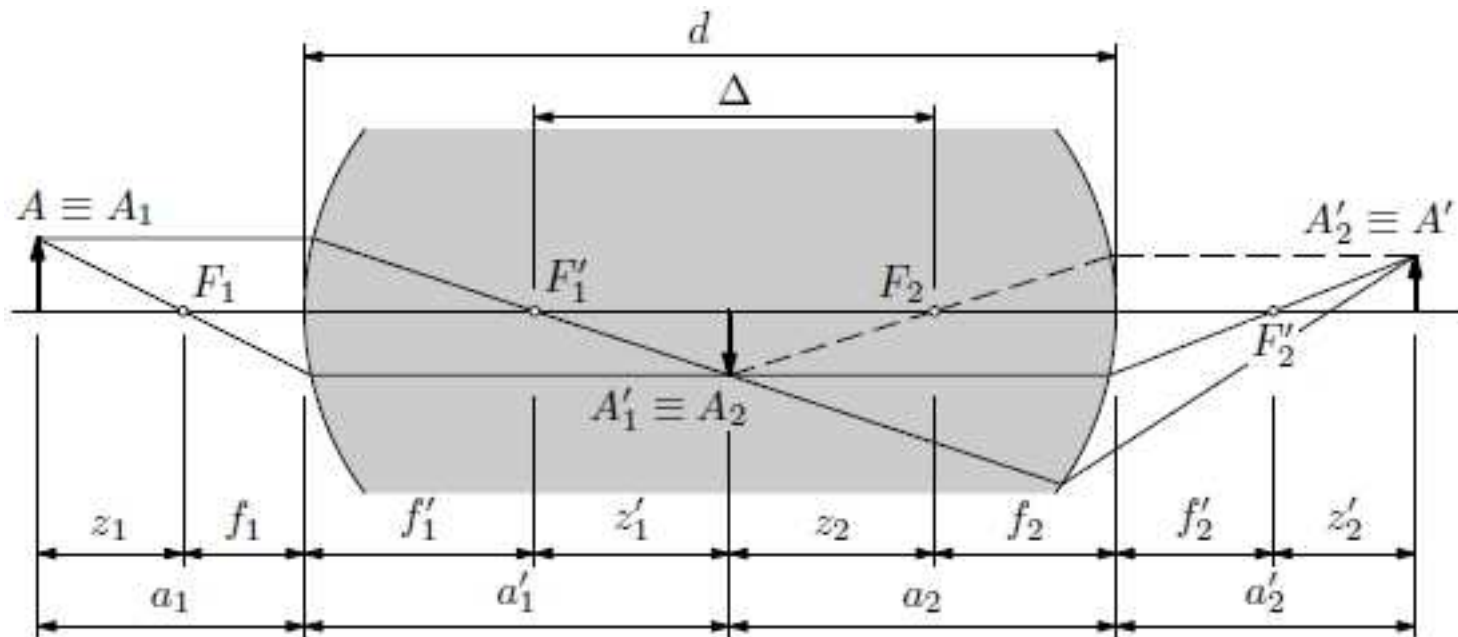
Kombinace dvou zobrazení.

Zobrazovací prvek je tvořen kombinací dvou po sobě následujících kulových lámavých ploch. První lámavá plocha je charakterizována ohniskovými body F_1 a F_1' a ohniskovými vzdálenostmi f_1 a f_1' , druhá plocha má ohniskové body F_2 a F_2' a ohniskové vzdálenosti f_2 a f_2' . Vzdálenost mezi oběma prvky je vyjádřena optickým intervalem Δ , měřeným od obrazového ohniska F_1' k předmětovému ohnisku F_2 druhého prvku.

$$z_1' - z_2 = \Delta$$

$$z_1 z_1' = f_1 f_1'$$

$$z_2 z_2' = f_2 f_2'$$



Kombinace dvou zobrazení.

Pro polohu ohnisek v souřadnicové soustavě spojené s ohnisky dostaneme:

$$\left. \begin{aligned} z'_1 - z_2 &= \Delta \\ z_1 z'_1 &= f_1 f'_1 \\ z_2 z'_2 &= f_2 f'_2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} z'_{2F'} &= -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} \\ z_{1F} &= \frac{f_1 f'_1}{\Delta} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f' &= -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \\ f &= \frac{f_1 f_2}{\Delta} \end{aligned}$$

kde f a f' jsou ohniskové vzdálenosti vztažené k hlavním rovinám:

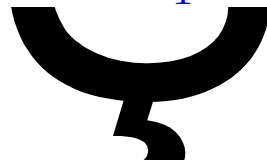
$$\begin{aligned} f &= z_{1F} - z_{1H} \\ f' &= z'_{2F'} - z'_{2H'} \end{aligned}$$

Tlustá čočka.

Tlustá čočka je zobrazovací prvek konečné tloušťky t ohraničený dvěma lámavými sférickými plochami o poloměrech křivosti r_1 a r_2 . Index lomu tlusté čočky je n_2 , index lomu okolního prostředí je n_1 . Odvození vztahu pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky vychází ze vztahů:

$$f_1 = \frac{n_1 r_1}{n_1 - n_2} \quad f_1' = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1} \quad t = f_1' + \Delta - f_2$$

$$f_2 = \frac{n_2 r_2}{n_2 - n_1} \quad f_2' = \frac{n_1 r_2}{n_1 - n_2}$$



$$f' = \frac{n_2 r_1 r_2}{(n_2 - 1)[(n_2 - 1)t + n_2(r_2 - r_1)]}$$

$$f = -f'$$

Tenká čočka.

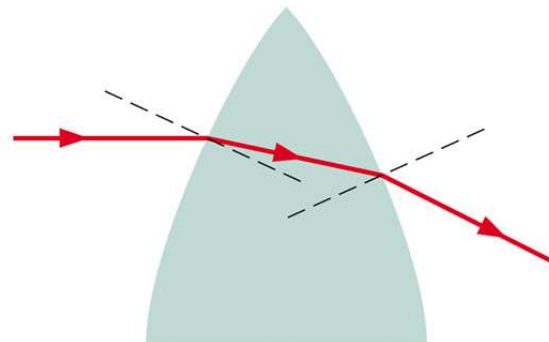
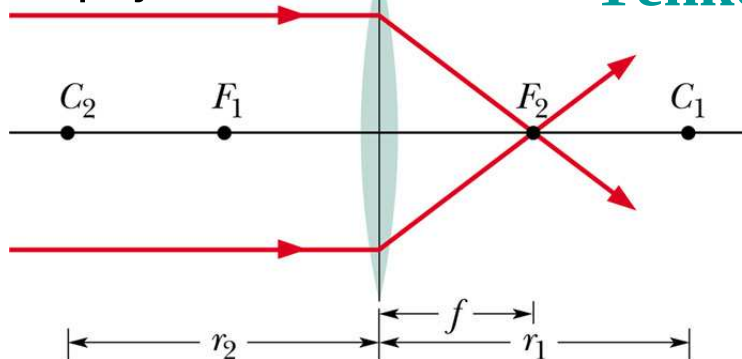
Ne vždy je třeba počítat s obecným vztahem pro ohniskovou vzdálenost, čočky. Je-li tloušťka čočky t malá, pak je možné použít aproximaci **tenké čočky** a položit $t = 0$. Ze vztahu pro tlustou čočku pak získáme rovnici tenké čočky:

$$\frac{1}{f'} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

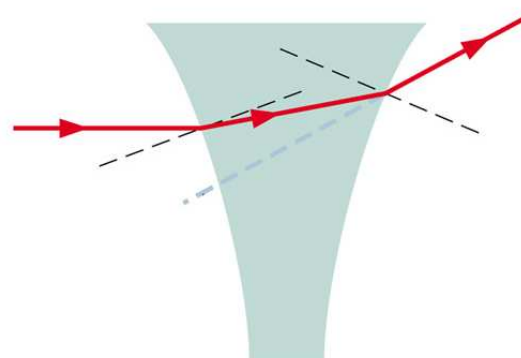
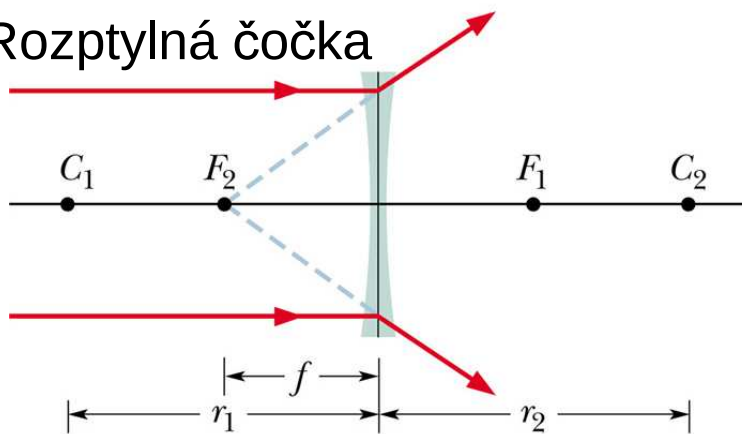
$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Spojná čočka

Tenké čočky.



Rozptylná čočka



Zobrazovací rovnice:

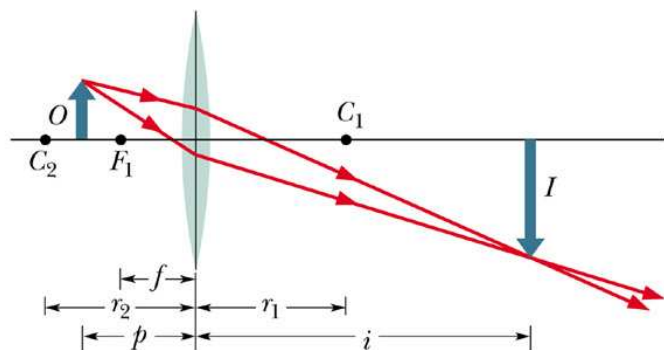
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{i}$$

Rovnice tenké čočky:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

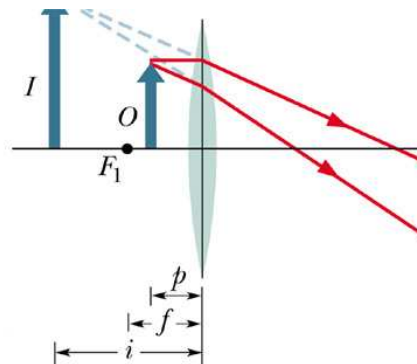
Zobrazení tenkou čočkou.

Spojná čočka



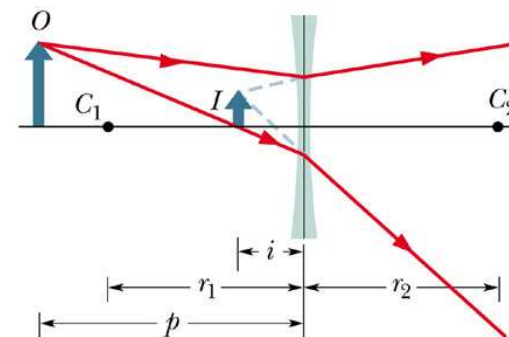
skutečný obraz

Spojná čočka



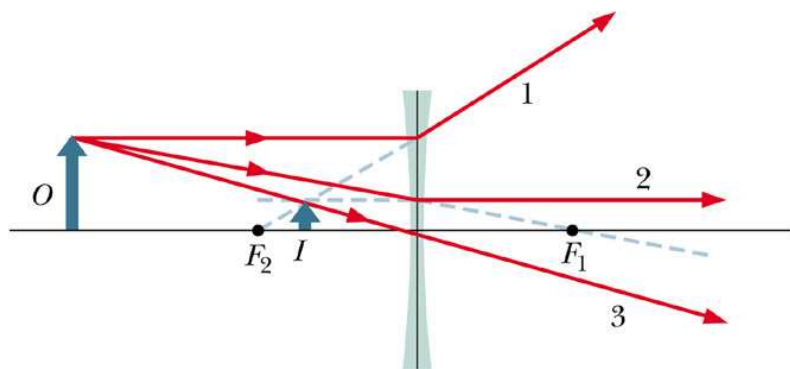
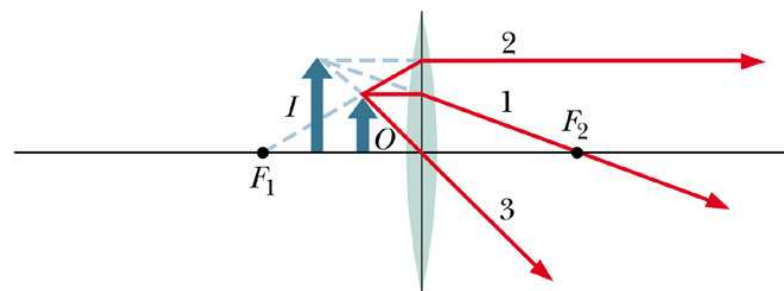
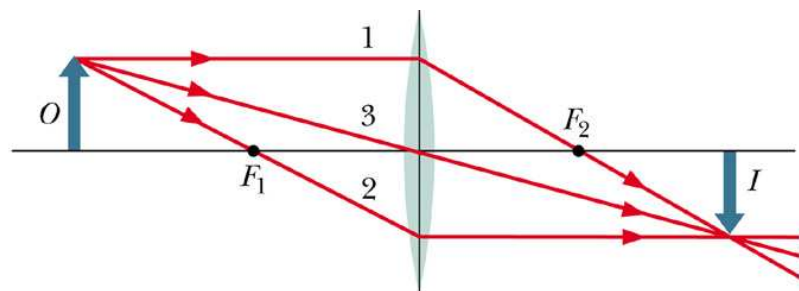
zdánlivý obraz

Rozptylná čočka



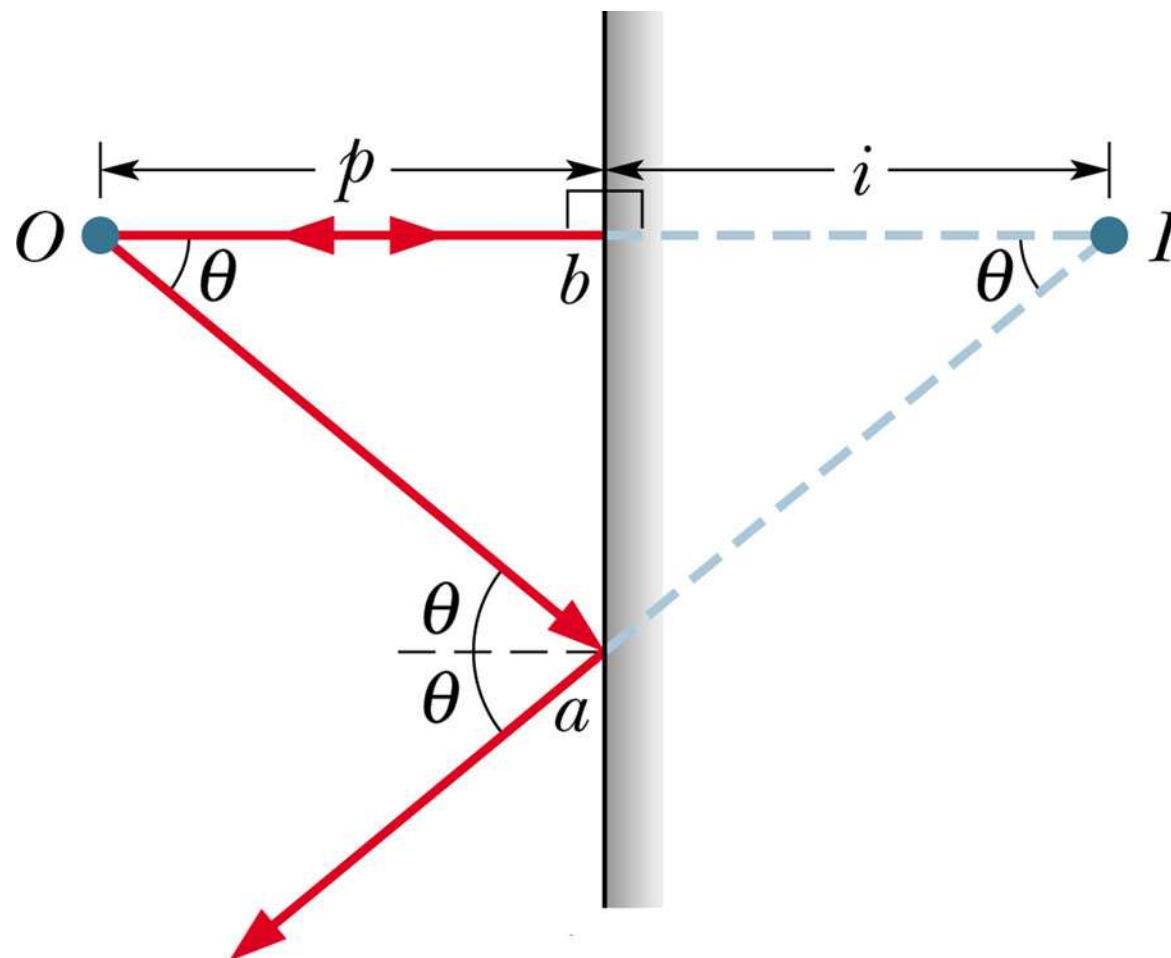
zdánlivý obraz

Průchod paprsku tenkou čočkou.



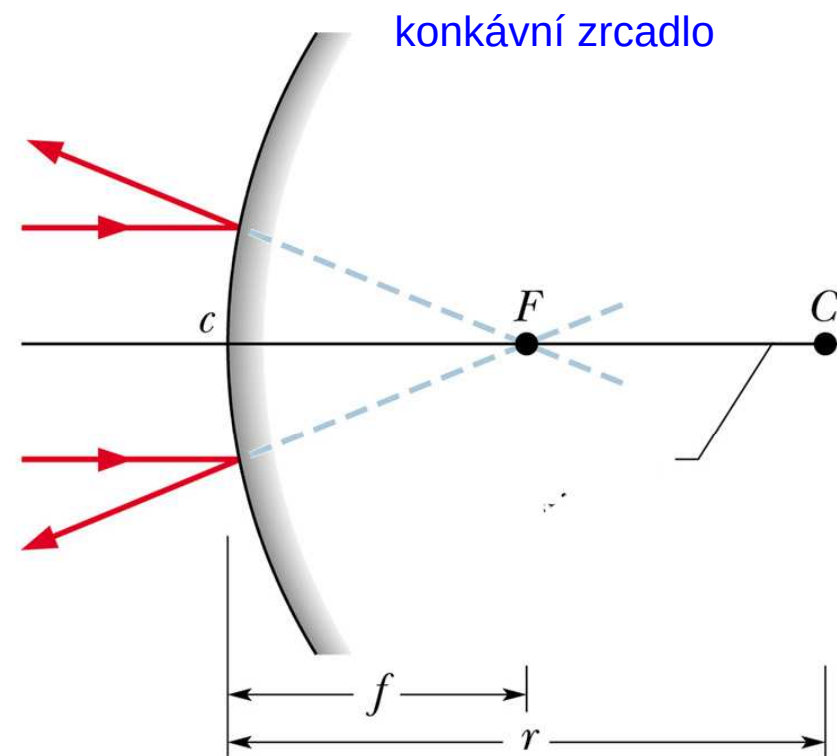
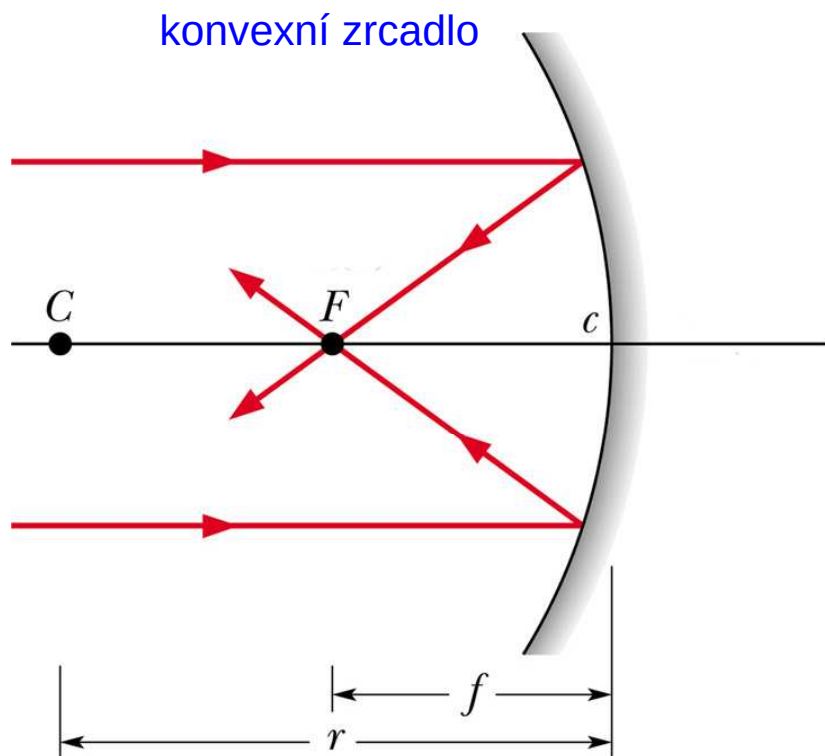
1. Paprsek paralelní s optickou osou procházejí ohniskem F_2 .
2. Paprsek procházející ohniskem F_1 , se v obrazovém prostoru šíří paralelně s optickou osou.
3. Paprsek procházející středem čočky se šíří beze změny.

Rovinné zrcadlo.



Obraz vytvořený rovinným zrcadlem je zdánlivý, vzpřímený a stejně velký jako předmět. Platí: $p = -i$

Sférická zrcadla.

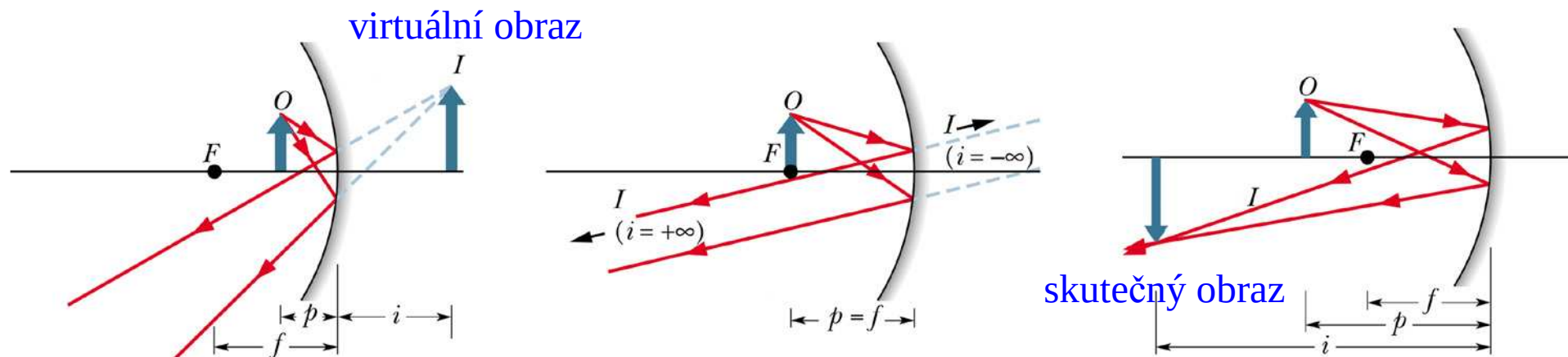


Sférické zrcadlo: $f = \frac{r}{2}$

$r > 0$ konvexní plocha (skutečný obraz)

$r < 0$ konkávní plocha (zdánlivý obraz)

Zobrazení sférickým zrcadlem.

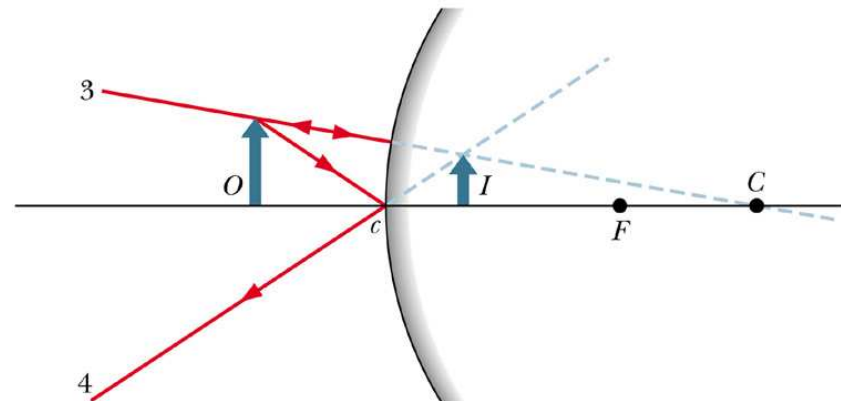
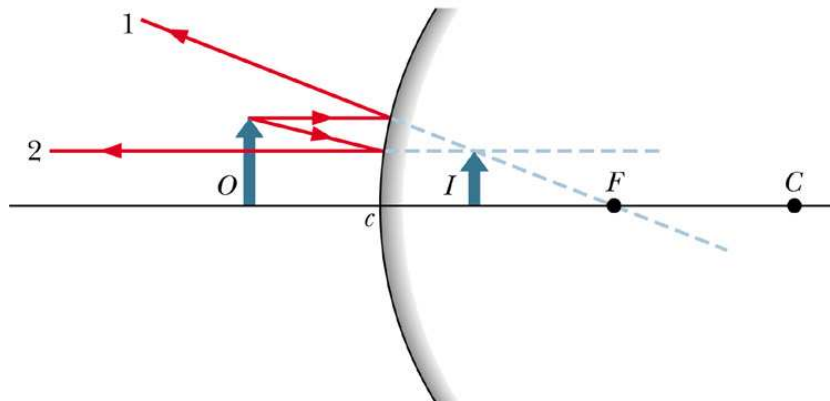
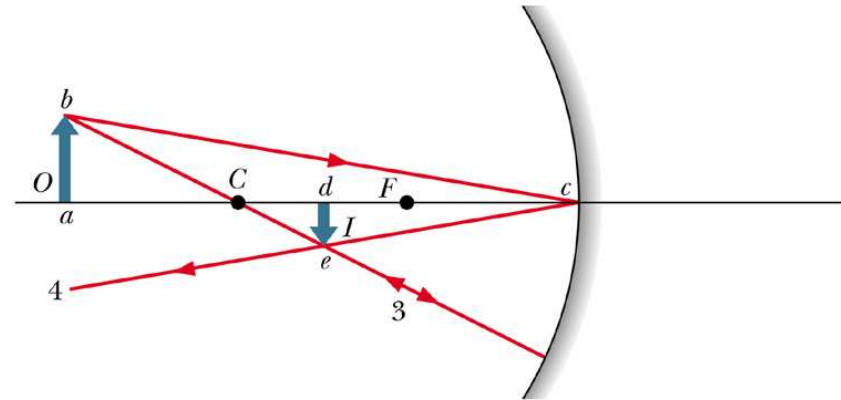
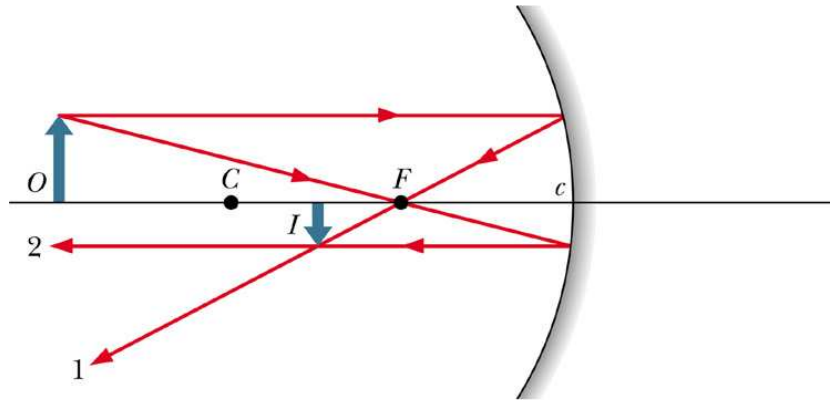


Příčné zvětšení: $|m| = \frac{h'}{h}$

Podélné zvětšení: $m = -\frac{i}{p}$

Sférické zrcadlo: $\frac{1}{p} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$

Chod paprsků odražených na sférickém zrcadle.



1. Paprsky paralelní s optickou osou se zobrazují do ohniska F .
2. Paprsky, které procházejí ohniskem se odrazí paralelně s optickou osou.
3. Paprsky procházející středem křivosti zrcadla C se odrážejí od zrcadla zpět.
4. Paprsky odrážející se ve vrcholu křivosti zrcadla c se odrážejí symetricky s optickou osou.