

Diferenciální rovnice pro fyziku.



Klasifikace diferenciálních rovnic.

1. Obyčejné diferenciální rovnice.

v rovnicích se vyskytují pouze obyčejné derivace hledaných funkcí jedné nezávislé proměnné.. Například

$$y' + q(x)y = f(x)$$

2. Parciální diferenciální rovnice.

v rovnicích se vyskytují parciální derivace hledaných funkcí více nezávislých proměnných. Například

$$\nabla \cdot \vec{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

3. Lineární diferenciální rovnice.

derivace se v rovnicích se vyskytují pouze lineárně, nevystupují v součinech derivací ani v součinech s hledanou funkcí.

$$y'' - xy' + y' = \cos(x)$$

4. Nelineární diferenciální rovnice.

není-li splněna alespoň jedna z uvedených vlastností, pak je rovnice nelineární diferenciální rovnicí.

$$y''y' - xy' + y' = \cos(y)$$

Základní definice.

Definice 1.

Nechť $\Phi(t, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je reálná funkce $n + 2$ reálných proměnných, které vzhledem k proměnné z_n není konstantní, definovaná na množině $\Omega \subset E_{n+2}$. Potom obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu pro neznámou funkci $y(t)$ reálné proměnné t nazýváme symbol:

$$\Phi(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Řešení rovnice v Ω na intervalu $\mathcal{J} \subset E_1$ nazýváme takovou funkci $y(t)$, která má na všechny derivace do řádu n včetně, pro kterou pro každé $t \in \mathcal{J}$ je:

$$(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in \Omega$$

a platí:

$$\Phi(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

Řešením diferenciální rovnice je tedy interval $\mathcal{J}$ a funkce $y(t)$ na tomto intervalu definovaná.

Řešení $y(t)$ na $\mathcal{J}$ a $Y(t)$ na $\mathcal{Y}$ považujeme za dvě různá řešení, i když je $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$ a $y(t) = Y(t)$ na $\mathcal{J}$.

Definice 2.

Nechť $y(t)$ je řešením rovnice (1) na intervalu $\mathcal{J}$ a $Y(t)$ na intervalu $\mathcal{Y}$. Je-li $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$ a $\mathcal{J} \neq \mathcal{Y}$ a platí $y(t) = Y(t)$ na $\mathcal{J}$ pak řekneme, že $Y(t)$ je **prodloužením** řešení $y(t)$ na $\mathcal{Y}$, zároveň je $y(t)$ **zúžením** řešení $Y(t)$ na interval $\mathcal{J}$. Řešení, která nelze v Ω prodloužit nazýváme maximální řešení rovnice (1).

Speciálním případem řešení rovnice (1) je rovnice řešená vzhledem k nejvyšší derivaci:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in \mathcal{J} \quad (2)$$

Věta 1. (Existenční věta.)

Nechť je funkce f spojitá na otevřené množině $\Omega \subset E_{n-1}$, $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ je libovolný pevný bod v Ω . Potom existuje alespoň jedno řešení rovnice (2) v Ω , které prochází bodem $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$. To znamená: že existuje $\delta > 0$ a funkce $y(t)$ definovaná na intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, která je na tomto intervalu řešením rovnice (2) v Ω , které splňuje podmínky

$$y^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3)$$

Podmínku (3) nazýváme **počáteční podmínkou** řešení diferenciální rovnice. Každé řešení rovnice (2) v Ω lze (obecně ne jedním způsobem) prodloužit do úplného řešení v Ω .

Věta 2. (Věta o jednoznačnosti řešení.)

Nechť je funkce f spojitá na otevřené množině $\Omega \subset E_{n-1}$ a funkce navíc splňuje následující podmínku (Lipschitzova podmínka):

Ke $\forall$ bodu $(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega$ existuje okolí $\mathcal{U}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ a číslo K takové, že pro každé dva body

$$(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), (t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{n-1})$$

z $\mathcal{U}(\tau, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ platí nerovnost:

$$|f(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{n-1})| \leq K \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \tilde{y}_i|$$

Potom řešení rovnice (2) splňující počáteční podmínku

$$y^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

je jediné v tomto smyslu: dvě řešení splňující (3) jsou si rovna na průniku svých definičních intervalů, speciálně dvě úplná řešení která splňují podmínku pro nějaké t_0 (3) jsou si rovna na identicky.

Rovnice typu $y' = f(t, y)$.

$$1. y' = f(t)$$

Řešením rovnice na intervalu $\mathcal{J}$ jsou všechny primitivní funkce k f na intervalu $\mathcal{J}$. Je-li f spojitá na $\mathcal{J}$ pak existuje na $\mathcal{J}$ nekonečně mnoho primitivních funkcí k f , které se liší o konstantu:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad \tau \in \mathcal{J}$$

kde t_0 je pevné číslo z $\mathcal{J}$ a y_0 probíhá E_1 . Řešení splňuje podmínku $y(t_0) = y_0$ a každým bodem $(t_0, y_0) \in \Omega \equiv E_1 \times \mathcal{J}$ prochází právě jedno řešení v Ω rovnice 1.

$$2. y' = g(y)$$

Nechť je funkce g spojitá a nenulová na intervalu $\mathcal{J} \subset E_1$. Potom všechna řešení rovnice 2. v množině $\Omega = E_1 \times \mathcal{Y}$ jsou dána vzorcem:

$$y(t) = G^{-1}(t - c), \quad t \in \mathcal{J}_c, \quad c \in E_1$$

Kde g je primitivní funkce k funkci $1/g$ na intervalu $\mathcal{Y}$, G^{-1} je inverzní funkce k funkci G a $\mathcal{J}_0$ je její definiční interval, $\mathcal{J}_c \equiv \{t, t-c \in \mathcal{J}_0\}$.

Postup řešení:

Zapíšeme rovnici ve tvaru:

$$\frac{dy}{dt} = g(y)$$

Pak formálně zapíšeme:

$$\frac{dy}{g(y)} = dt \rightarrow G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int dt = t - c$$

Následně najdeme-li funkci G , která je primitivní funkcí k funkci $1/g$ dostaneme řešení tak, že vyjádříme y jako funkci t z rovnice:

$$G(y) = t - c$$

Řešení procházející daným bodem (t_0, y_0) dostaneme vyjádřením y ze vztahu:

$$\int_{y_0}^y \frac{d\varphi}{g(\varphi)} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

Příklad 1: $y' = y^{2/3}$

V tomto případě je $g(y) = y^{2/3}$, $g(y) > 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 0$.

Řešení v horní polorovině $g(y) > 0$ dostaneme podle postupu:

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dt \rightarrow 3y^{1/3} = t - c, \quad t > c$$

Pro každé $c \in E_1$ je řešení pro $y > 0$: $y_c(t) = \frac{1}{27}(t - c)^3, \quad t > c$

Analogicky je řešením pro každé $c \in E_1$ v polorovině $y < 0$:

$$\tilde{y}_c(t) = \frac{1}{27}(t - c)^3, \quad t < c$$

Řešení rovnice je však také řešení identicky rovné nule, tj. pro $g(0) = 0$.

$$y_0 = c$$

Příklad 2: $y' = y$

Funkce $g(y) = y$ je spojitá, přičemž $g(y) > 0$ ($g(y) < 0$) pro $y > 0$ ($y < 0$) a $g(0) = 0$.

1. V horní polorovině $y > 0$ je řešením:

$$y_c(t) = e^{t-c}, \quad t \in E_1$$

pro každé $c \in E_1$.

2. V dolní polorovině $y < 0$ je řešením:

$$\tilde{y}_c(t) = -e^{t-c}, \quad t \in E_1$$

pro každé $c \in E_1$.

3. Kromě řešení 1. a 2. je třeba uvážit, že rovnici splňuje též řešení $y \equiv 0$, $t \in E_1$.

$$3. y' = f(t)g(y)$$

Rovnici řešíme metodou **separace proměnných**:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)dt$$

Přechodem k primitivním funkcím $G(y)$ a $F(t)$ k funkcím $1/g$ resp. f dostaneme rovnost:

$$G(y) = F(t)$$

Odkud, pokud existuje inverzní funkce $G^{-1}(y)$ k funkci $G(y)$ získáme řešení rovnice ve tvaru:

$$y(t) = G^{-1}(F(t))$$

Primitivní funkce jsou určeny až na aditivní konstanty. Volíme-li tyto konstanty různě, dostáváme různá řešení. Hledáme-li řešení procházející bodem (x_0, y_0) pak jsou primitivní funkce dány vztahy:

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{d\varphi}{g(\varphi)} \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Pak y jako funkci t vyjádříme z rovnice: $\int_{y_0}^y \frac{d\varphi}{g(\varphi)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$

Příklad 3: $y' = t\sqrt[3]{y^2}$

Řešení rovnice v pásu $y > 0$ vyplývá z rovnice:
$$\int_{y_0}^y \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{\varphi^2}} = \int_{t_0}^t \tau d\tau, \quad y_0 > 0$$

tedy:
$$y^{1/3} = y_0^{1/3} + \frac{(t^2 - t_0^2)}{6} \rightarrow y(t) = \frac{1}{6^3} [t^2 - (t_0^2 - 6y_0^{1/3})]^3$$

Zavedeme-li konstantu c vztahem: $c = (t_0^2 - 6y_0^{1/3})$

Dostaneme řešení ve tvaru:

$$y(t) = \frac{1}{6^3} [t^2 - c]^3$$

Kde c je kladná (záporná) pro body (t_0, y_0) pod (nad) křivkou: $y(t) = \frac{1}{6^3} t^6$
a rovna nule pro body na této křivce.

Dalším řešením je identické řešení:

$$y(t) \equiv 0$$

Lineární diferenciální rovnice.

Definice 3.

Rovnice

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)} = f(t) \quad (1)$$

kde a_k , f jsou funkce na množině $M \subset E_1$, $a_n(t) \neq 0$ na M , nazýváme **lineární diferenciální rovnici n -tého řádu** na M . Funkce $a_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, nazýváme koeficienty rovnice a funkci $f(t)$ nazýváme pravou stranou rovnice. Rovnici kde je pravá strana rovna nule nazýváme **homogenní diferenciální rovnici** (též rovnici bez pravé strany):

$$\sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)} = 0 \quad (2)$$

Řešením lineární diferenciální rovnice na intervalu $\mathcal{J} \subset M$ rozumíme komplexní funkci, která splňuje rovnici pro každé $t \in \mathcal{J}$.

Věta 3.

Nechť koeficienty a pravá strana rovnice (1) jsou spojité funkce na intervalu $\mathcal{J} \subset E_1$, $a(t) \neq 0$ na $\mathcal{J}$. Potom pro každou n -tici čísel $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in C_n$ a každé $t_0 \in \mathcal{J}$ existuje právě jedno maximální řešení v $\mathcal{J} \times C_n$ které splňuje podmínku:

$$y^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Lineární homogenní diferenciální rovnice.

Definice 3.

Zavedeme lineární operátor $L: C^{(n)}(\mathcal{J}) \rightarrow C(\mathcal{J})$ rovnicí:

$$(Ly)(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)}, \quad t \in \mathcal{J}, \quad y \in C^{(n)}(\mathcal{J})$$

$C^{(n)}(\mathcal{J})$ je lineární prostor všech funkcí, které mají na intervalu $\mathcal{J} \subset M$ spojitě derivace až do řádu n .

Lineární homogenní diferenciální rovnici pak snadno zapíšeme ve tvaru:

$$Ly = 0$$

Všechna řešení $y_1, y_2, \dots, y_n$ (reálná, komplexní) homogenní diferenciální rovnice tvoří n -dimensionální podprostor prostoru $C^{(n)}(\mathcal{J})$ (reálného, komplexního).

Fundamentální systém řešení.

Definice 4.

Řekneme, že reálné (komplexní) funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ jsou lineárně závislé na množině $M \subset E_1$, jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule, že platí:

$$\sum_{i=0}^n c_i f_i(t) = 0, \quad t \in M$$

Definice 5.

Řekneme, že reálné (komplexní) funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ jsou lineárně závislé na množině $M \subset E_1$, jestliže existují taková reálná (komplexní) čísla $c_1, c_2, \dots, c_n$ ne všechna rovná nule, že platí:

$$\sum_{i=0}^n c_i f_i(t) = 0, \quad t \in M$$

v opačném případě říkáme, že jsou funkce na M lineárně závislé.

Definice 6.

n řešení lineární homogenní diferenciální rovnice n -tého řádu lineárně nezávislých na intervalu $\mathcal{J} \subset E_1$ nazýváme fundamentálním systémem řešení této rovnice na $\mathcal{J}$.

Wronského determinant.

Definice 6.

Nechť funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ mají v bodě t_0 derivace do řádu $n-1$. Potom determinant

$$\det \begin{pmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) & \dots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & \dots & f_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & f_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

Nazýváme **Wronského (Wronskián) determinant** funkcí $f_1, f_2, \dots, f_n$ v bodě t_0 a označujeme jej $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(t_0)$.

Věta 3.

Jsou-li funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) \in C^{(n-1)}(\mathcal{J})$ lineárně závislé na množině $M \subset E_1$, pak je

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(t) = 0, \quad t \in \mathcal{J}$$

Věta 4.

Nechť $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou řešením lineární homogenní diferenciální rovnice na intervalu $\mathcal{J}$.
Potom

- a) buď je $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) = 0$ pro každé $t \in \mathcal{J}$
nebo je $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) \neq 0$ pro každé $t \in \mathcal{J}$
- b) v prvním případě jsou řešení lineárně závislá
ve druhém případě jsou řešení lineárně nezávislá.

Definice 5.

n řešení lineární homogenní diferenciální rovnice n -tého řádu lineárně nezávislých na intervalu $\mathcal{J} \subset E_1$ nazýváme fundamentálním systémem řešení této rovnice na $\mathcal{J}$.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice.

Nehomogenní lineární diferenciální rovnici zapíšeme rovnicí:

$$Ly = f$$

Z obecných vět vyplývá:

a) Je-li y_0 řešení rovnice $Ly_0 = 0$ a $\tilde{y}$ řešením rovnice $L\tilde{y} = f$, pak funkce $y = y_0 + \tilde{y}$ je též řešením rovnice $L\tilde{y} = f$, a naopak.

Pro nalezení všech řešení nehomogenní rovnice stačí najít jedno její pevné řešení (**partikulární řešení**) a všechna řešení příslušné homogenní rovnice (**fundamentální systém**).

b) Je-li $Ly_1 = f_1$ a $Ly_2 = f_2$, pak též platí $L(y_1 + y_2) = f_2 + f_1$.

Nalezení jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice lze najít z fundamentálního systému odpovídající homogenní rovnice metodou **variace konstant**.

Variace konstant.

Je-li $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ fundamentální systém řešení homogenní rovnice: $Ly = 0$

pak její obecné řešení je dáno: $y_0 = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t)$, kde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou konstanty.

partikulární řešení příslušné nehomogenní rovnice $Ly = f$ se hledá ve tvaru:

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i(t) \quad (*)$$

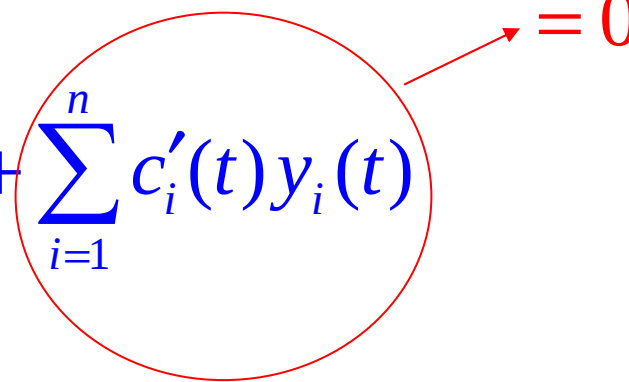
kde $c_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ jsou funkce.

K určení koeficientů $c_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ pro něž bude $(*)$ partikulárním řešením nehomogenní rovnice máme pouze jednu rovnici $(*)$ a proto můžeme na funkce $c_i(t)$ klást podmínky, tak, aby řešení bylo co nejjednodušší a přitom výsledná soustava rovnic pro funkce $c_i(t)$ měla řešení.

Derivováním funkce:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i(t)$$

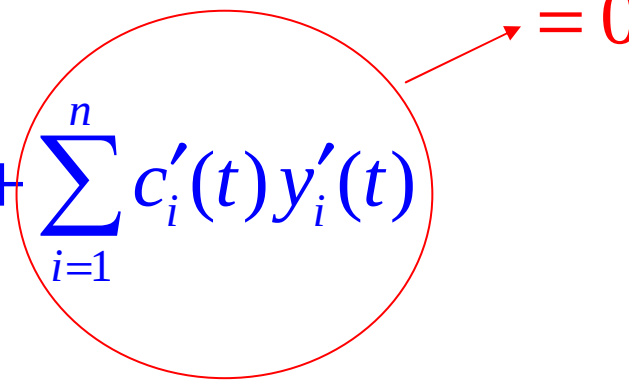
podle t dostaneme rovnici pro první derivaci:

$$y'(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i'(t) + \sum_{i=1}^n c_i'(t) y_i(t)$$


Pro první derivaci dostaneme:

$$y'(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i'(t)$$

Derivováním rovnice dostaneme:

$$y''(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i''(t) + \sum_{i=1}^n c_i'(t) y_i'(t)$$


Pro druhou derivaci dostaneme:

$$y''(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i''(t)$$

Tento postup opakujeme až do $(n - té)$ derivace.

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y^{(n)}_i(t) + \sum_{i=1}^n c'_i(t) y^{(n-1)}_i(t)$$

Poslední podmínku musíme volit tak, aby funkce: $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i(t)$

byla řešením rovnice s pravou stranou, podmínka je ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) y^{(n-1)}_i(t) = \frac{f(t)}{a_n(t)}$$

Tímto postupem dostaneme n lineárních algebraických rovnic pro neznáme

$$c'_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Koeficienty pak dostaneme

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Lineární rovnice 1. řádu.

Lineární rovnici prvního řádu nazýváme rovnicí:

$$y' + a(t)y = b(t)$$

$a(t)$ a $b(t)$ jsou dané funkce. Jsou-li funkce $a(t)$ a $b(t)$ spojité na intervalu $\mathcal{J}$, pak je řešení dáno vztahem:

$$y(t) = e^{-\int a(t)dt} \int b(t) e^{\int a(t)dt} dt$$

Speciálně řešení procházející bodem (t_0, y_0)

$$\tilde{y}(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \cdot \int_{t_0}^t b(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} a(\eta) d\eta} d\tau + y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

Tato řešení jsou definovaná na celém $\mathcal{J}$ a jsou úplná v $\Omega \equiv \mathcal{J} \times E_1$.

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Máme **homogenní diferenciální rovnici**, kde koeficienty a_i jsou konstantní a nenulové pro $i = 0, 1, \dots, n$:

$$Ly \equiv \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)} = 0 \quad (**)$$

Řešení rovnice hledáme ve tvaru:

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Čísla λ (obecně komplexní) jsou kořeny polynomu $P(\lambda)$, který dostaneme dosazením funkce $y(t)$ do (**):

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$$

Polynom $P(\lambda)$ nazýváme **charakteristickým polynomem** rovnice (**), rovnici:

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0$$

pak nazýváme **charakteristickou rovnicí**.

Fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Věta 5.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ kde $k \leq n$ jsou všechny různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (**), $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ jsou jejich násobnosti. Potom následující:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\nu_1-1} e^{\lambda_1 t} \\ &e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{\nu_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ &e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k-1} e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (**):

Polynom s reálnými koeficienty může mít i komplexní kořeny to znamená, že některá řešení rovnice s reálnými koeficienty mohou být komplexní funkce.

Fundamentální systém homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Věta 6.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_{p+r}, \overline{\lambda_{p+1}}, \overline{\lambda_{p+2}}, \dots, \overline{\lambda_{p+r}}$ jsou všechny různé kořeny charakteristického polynomu rovnice (***) s reálnými konstantními koeficienty, $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, p$ jsou reálné a

$$\operatorname{Im} \overline{\lambda_i} = -\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0, \quad i = p+1, p+2, \dots, p+r$$

$\nu_i, i = 1, 2, \dots, p+r$ jsou jejich násobnosti.

Potom reálný fundamentální systém řešení dané rovnice je tvořen funkcemi:



Následující strana.

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\nu_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_p t}, te^{\lambda_p t}, \dots, t^{\nu_p-1} e^{\lambda_p t}, \\
& e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), \\
& te^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), te^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), \\
& \dots \\
& t^{\nu_{p+1}-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), t^{\nu_{p+1}-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+1})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+1} t), \\
& \dots \\
& e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t), e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t), \\
& te^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t), te^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t), \\
& \dots \\
& t^{\nu_{p+r}-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \sin(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t), t^{\nu_{p+r}-1} e^{(\operatorname{Re} \lambda_{p+r})t} \cos(\operatorname{Im} \lambda_{p+r} t)
\end{aligned}$$

Partikulární řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou.

Věta 7.

I. Rovnice tvaru:

$$Ly \equiv \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = P_n(t) e^{\mu t} \quad (\dagger)$$

kde koeficienty a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, jsou konstantní a nenulové, a $P_n(t)$ je polynom stupně m , μ je číslo. Je-li μ ρ – násobný kořen charakteristického polynomu odpovídající homogenní rovnice:

$$Ly = 0$$

pak existuje mnohočlen Q stupně nejvýše m tak, že funkce

$$t^{\rho} Q(t) e^{\mu t}$$

II. Rovnice tvaru:

$$Ly \equiv \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + R(t) \sin \beta t)$$

s konstantními reálnými koeficienty, $a_n \neq 0$, kde P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty stupně nejvýše m , α a β jsou reálná čísla. Je-li $\mu = \alpha + i\beta$ je ρ – násobný kořen charakteristického polynomu rovnice $Ly = 0$, pak existují polynomy Q a S s reálnými koeficienty stupně nejvýše m , tak že funkce

$$t^{\rho} e^{\alpha t} (Q(t) \cos \beta t + S(t) \sin \beta t)$$

je řešením rovnice $(\dagger)$.

Příklad 4:

Máme rovnici: $y''' - y'' + y' - y = \sin t$

Charakteristický polynom: $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

má kořeny 1 , $\pm i$ a $\mu = 0 + i$ je jednonásobným kořenem tohoto polynomu, $\max \{st P, st R\} = st R = 0$ a proto hledané řešení má tvar:

$$y(t) = t(a \cos t + b \sin t)$$

po dosazení do rovnice dostaneme:

$$y''' - y'' + y' - y = 2(a - b) \sin t - 2(a + b) \cos t$$

porovnáním koeficientů: $2(a - b) = 1, 2(a + b) = 0$

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$$

Dostaneme řešení:

$$y(t) = \frac{t}{4}(\cos t - \sin t)$$

Příklady.

Příklad 5:

Volný pád tělesa v gravitačním poli země.

Najdeme vztah pro rychlost a dráhu volného pádu tělesa jednotkové hmotnosti v gravitačním poli země v blízkosti zemského povrchu..

Vyjdeme z pohybové rovnice:
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

dostaneme integrací vztah pro rychlost volného pádu:

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0$$

a konečně vztah závislosti dráhy volného pádu na čase:

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Příklad 6:

Derivace funkce představuje směrnici tečny k její křivce v daném bodě. Najdeme takovou křivku, pro níž je směrnice přímo úměrná součinu souřadnic xy :

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = -kxy$$

- k je konstanta úměrnosti. Rovnici převedeme na tvar: $\frac{dy}{y} = -kx dx$

integrací:

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}kx^2 + \ln|C| \rightarrow y = C \exp\left(-\frac{kx^2}{2}\right)$$

Prochází-li křivka bodem $(0,1)$, pak je $C = 1$.

Příklad 7:

Derivace funkce představuje směrnici tečny k její křivce v daném bodě. Najdeme takovou křivku, pro níž je směrnice přímo úměrná součinu souřadnic xy :

$$\frac{dy}{dx} \equiv y' = -kxy$$

- k je konstanta úměrnosti. Rovnici převedeme na tvar: $\frac{dy}{y} = -kx dx$

integrací:

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}kx^2 + \ln|C| \rightarrow y = C \exp\left(-\frac{kx^2}{2}\right)$$

Prochází-li křivka bodem $(0,1)$, pak je $C = 1$.

Příklad 8:

$$m(200) = 0,915m_0 \rightarrow 8,5\%$$

Radioaktivní rozpad.

Rychlost rozpadu je přímo úměrná jeho hmotnosti. Určete kolik procent hmotnosti m rádia se rozpadne za 200 let, je-li poločas rozpadu rádia roven 1590 let.

$$dm = -\lambda m dt$$

λ je konstanta úměrnosti. Rovnici převedeme na tvar: $\frac{dm}{m} = -\lambda dt$

integrací: $\ln m = -\lambda t + \ln C \rightarrow m = C e^{(-\lambda t)}$

Z počáteční podmínky v čase $t = 0$ je $m = m_0$. dostaneme $C = m_0$ a tedy: $m = m_0 e^{(-\lambda t)}$

Koeficient λ určíme z podmínky $t = T$ je $m = m_0/2$: $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{(-\lambda T)} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0 2^{-\frac{t}{T}} = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Příklad 9:

Najděme řešení rovnice variací konstant: $y' + y = e^x$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici:

$$y' + y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \rightarrow y = Ce^{-x}$$

Předpokládejme $C = C(x)$, potom: $y = C(x)e^{-x} \rightarrow$

$$y' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$$

Po dosazení do rovnice: $C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = e^{-x} \rightarrow$

$$C'(x) = e^{2x} \rightarrow C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + K$$

Pak je řešení: $y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + K \right) e^{-x}$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}e^x + Ke^{-x}$$

Příklad 10:

Najděme řešení rovnice variací konstant: $xy' - y = x^2$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici:

$$xy' - y = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C \rightarrow y = cx$$

Předpokládejme $C = C(x)$, potom: $y = C(x)x \rightarrow y' = C'(x)x + C(x)$

Po dosazení do řešené rovnice:

$$x[C'(x)x + C(x)] - C(x)x = x^2 \rightarrow$$

$$x^2 C'(x) = x^2 \rightarrow C'(x) = 1 \rightarrow C(x) = x + K$$

Pak je řešení:

$$y = (x + K)x = x^2 + Kx$$

Příklad 11:

Najdeme řešení rovnice s konstantními koeficienty s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y' = 1$.

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Nejprve vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$$

Řešení najdeme ve tvaru:

$$y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

Derivace řešení:

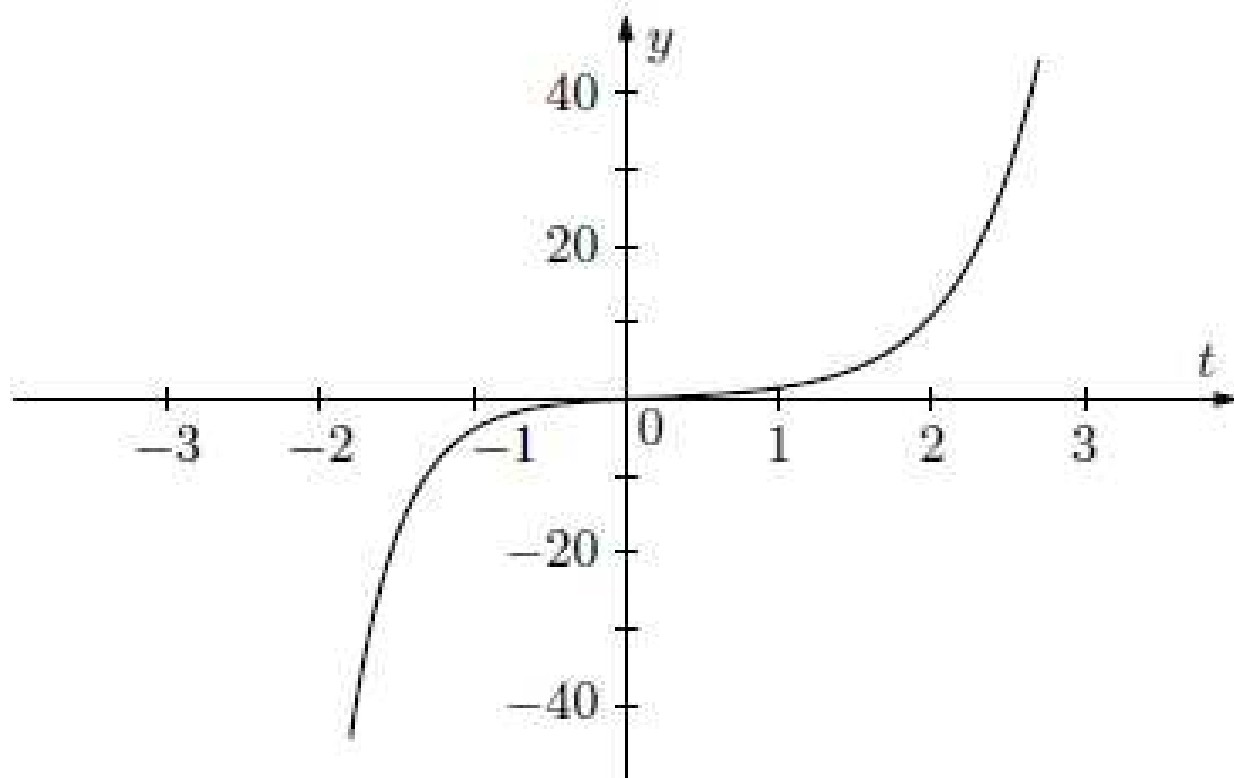
$$y' = -3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t}$$

Koeficienty vyhovující počátečním podmínkám najdeme:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) &= -3C_1 + 2C_2 = 1 \end{aligned} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{5}, C_2 = \frac{1}{5}$$

Po dosazení řešení rovnice:

$$y = -\frac{1}{5} e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t}$$



Řešení rovnice $y'' + y' - 6y = 0$ splňující počáteční podmínku
 $y(0) = 0$ a $y' = 1$.

Příklad 12:

Najdeme řešení rovnice s konstantními koeficienty s počátečními podmínkami $y(0) = 2$ a $y' = 0$.

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Nejprve vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

Řešení najdeme ve tvaru: $y = e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

Derivace:

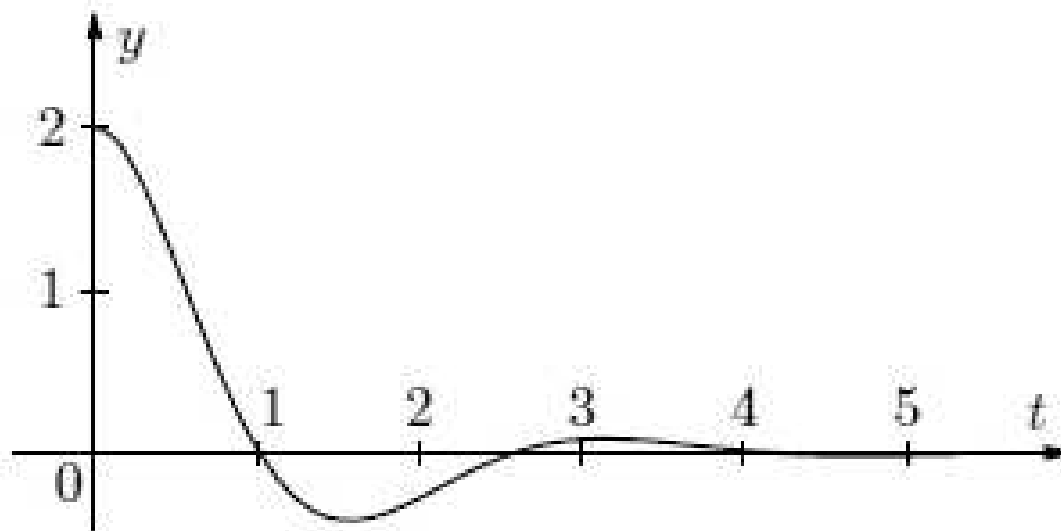
$$y' = e^{-t} (-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) - e^{-t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

Koeficienty vyhovující počátečním podmínkám najdeme:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned} \rightarrow C_1 = 2, C_2 = 1$$

Po dosazení řešení rovnice:

$$y = e^{-t} (2 \cos 2t + \sin 2t)$$



Řešení rovnice $y'' + 2y' + 5y = 0$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 2$ a $y' = 0$.

Příklad 13:

Najdeme řešení rovnice s konstantními koeficienty s počátečními podmínkami $y(0) = 10$ a $y'(0) = -20$.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Nejprve vyřešíme charakteristickou rovnici:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Kořen rovnice je dvojnásobný.

Řešení najdeme ve tvaru:

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

Derivace:

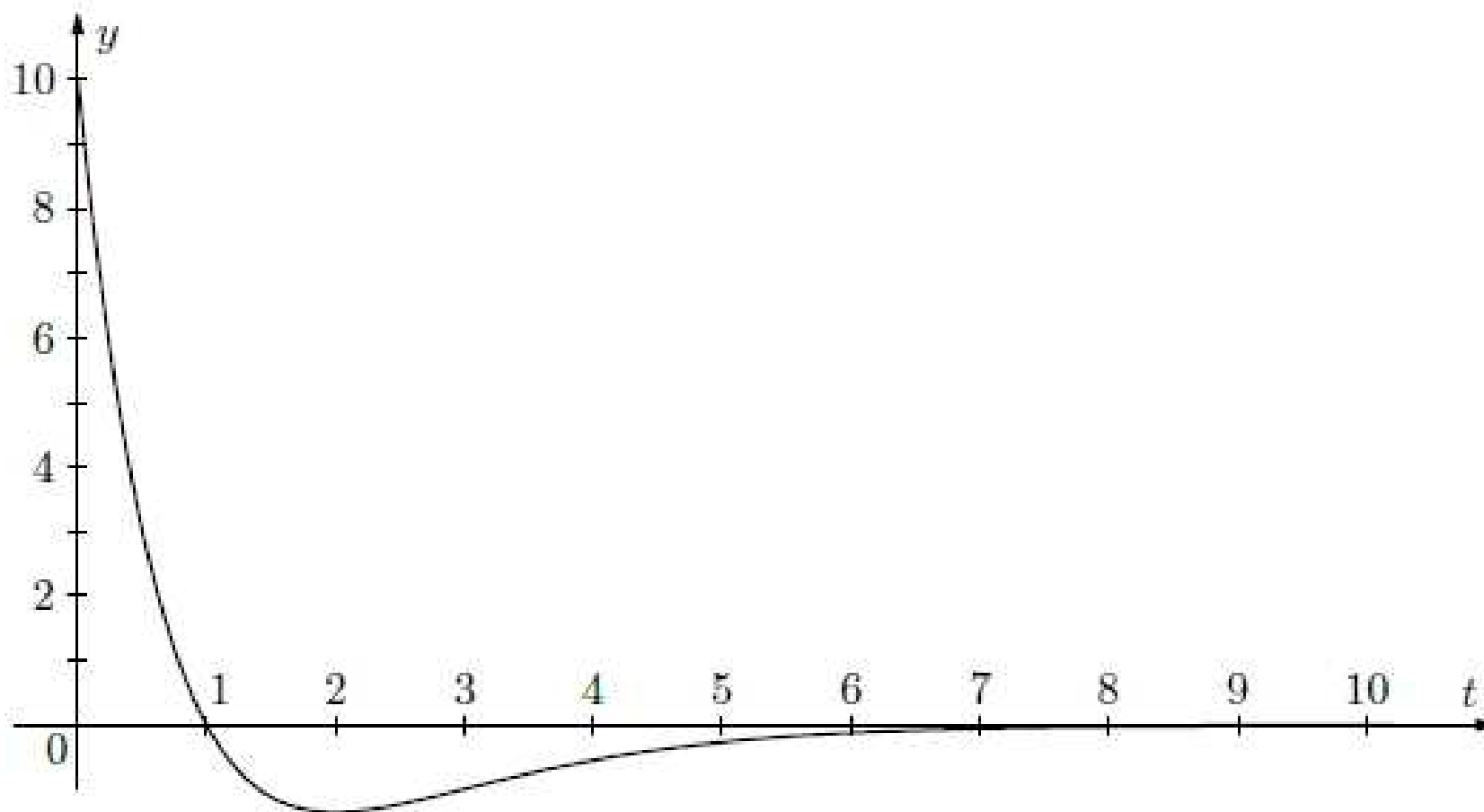
$$y' = -C_1 e^{-t} - C_2 t e^{-t} + C_2 e^{-t}$$

Koeficienty vyhovující počátečním podmínkám najdeme:

$$\begin{aligned} y(0) &= 10 \\ y'(0) &= -20 \end{aligned} \rightarrow C_1 = 10, C_2 = -10$$

Po dosazení dostaneme řešení rovnice:

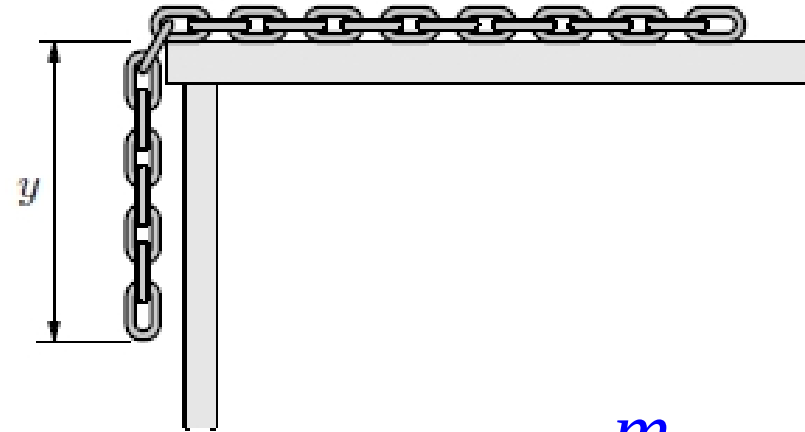
$$y = 10e^{-t} - 10te^{-t} = 10(1-t)e^{-t}$$



Řešení rovnice $y'' + 2y' + y = 0$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 10$ a $y' = -20$.

Příklad 14:

Řetěz hmotnosti m o délce $l = 4 \text{ m}$ klouže bez tření z horizontální desky. V čase $t = 0$ visí dolů konec řetězu o délce $a = 0,5 \text{ m}$. Za jak dlouho sklouzne dolů celý řetěz?



Pohyb řetězu způsobuje tíhová síla působící na část řetězu visící z desky: $F = \frac{m}{l} yg$

Pohybová rovnice: $my'' = \frac{m}{l} yg \rightarrow y'' = \frac{g}{l} y = 0$

Z charakteristická rovnice najdeme koeficienty λ : $\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

Obecné řešení: :

$$y = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Z počátečních podmínek:

$$y = \frac{1}{4} (e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t})$$

Příklad 14 - pokračování:

Z rovnice:

$$y = \frac{1}{4}(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t})$$

vyjádříme čas t jak proměnnou délky visící části řetězu y . Obě strany rovnice vynásobíme výrazem

$$4e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici:

$$(e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}) - 4ye^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 1 = 0$$

Fyzikální smysl má řešení:

$$e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = 2y + \sqrt{4y^2 - 1}$$

Z této rovnice vyjádříme čas t v závislosti na y , pak po dosazení za $y = l$ dostaneme:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln(2l + \sqrt{4l^2 - 1})$$

$$t = 1,77s$$