

Booleova algebra a minimalizace

Napsal Jiří Chytil

Jako první nás čekají pravidla které platí při počítání v binární soustavě tj. booleova algebra. Dále se podíváme na minimalizaci. Jistě jste si totiž všimli, že mnohé funkce jsou zbytečně složité a šly by zjednodušit. Tím se budeme zabývat právě při minimalizaci. Pro minimalizaci se používá Karnaughova mapa.

Booleova algebra

Booleova algebra je soubor pravidel, která platí pro počítání a operace v dvojkové a soustavě. Nejdůležitější částí bude DeMorganův zákon a zákon dvojí negace.

Zákon	$\&$	$\vee$
Zákon agresivity hodnot	$a \& 0 = 0$	$a \vee 1 = 1$
zákon neutrálnosti hodnot	$a \& 1 = a$	$a \vee 0 = a$
Zákon absorce	$a \& a = a$	$a \vee a = a$
Zákon vyloučení třetího	$a \& \bar{a} = 0$	$a \vee \bar{a} = 1$
Zákon komutativní	$a \& b = b \& a$	$a \vee b = b \vee a$
Zákon asociativní	$a \& (b \& c) = (a \& b) \& c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
De Morganův zákon	$\overline{a \& b} = \bar{a} \vee \bar{b}$	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \& \bar{b}$

Zákon dvojí negace	$a = \bar{\bar{a}}$
--------------------	---------------------

$$a \vee (\bar{a} \& b) = a \vee b \qquad a \& (\bar{a} \vee b) = a \& b$$

Tabulka č. 1 - Booleova algebra

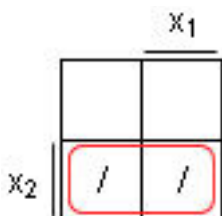
DeMorganovy zákony budeme využívat co nevidět při tvorbě, spíše při návrhu, integrovaných obvodů. To bude nejspíš přespříští díl tohoto seriálu.

Minimalizace

Minimalizace je někdy značné zjednodušení funkce, které ušetří spoustu materiálu a práce. Počet logických hradel po minimalizaci neřídka klesne hrubě pod padesát procent.

Minimalizace pomocí Karnaughovy mapy spočívá v tom, že spojíme sousedící termy (políčka, jež obsahují log. 1, označena čárkou). Můžeme je spojovat do dvojic, čtveřic, osmic a šestnáctic. Spojeným termům říkáme mintermy. Více na příkladech:

Prvně se podíváme na takový nejjednodušší případ.



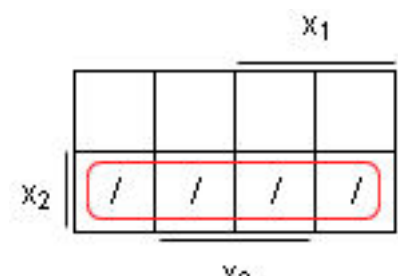
$$f(x) = (\overline{x_2} \& \overline{x_1}) \vee (\overline{x_2} \& x_1)$$

$$f(x) = \overline{x_2}$$

obrázek č. 1 - Karnaughova mapa - Aserce

Na první rovnici vidíte původní rovnici, druhá je rovnice minimalizace. Už při takovéto jednoduché úloze je zjednodušení značné.

Totéž si nyní ukážeme na Karnaughově pro tři vstupní proměnné.



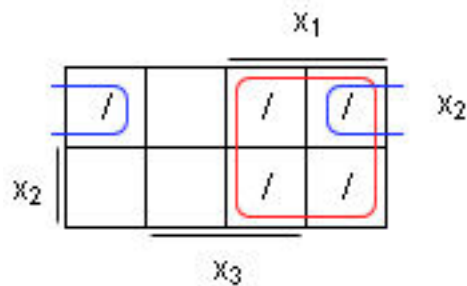
$$f(x) = (\overline{x_3} \& \overline{x_2} \& \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \& \overline{x_2} \& x_1) \vee (x_3 \& \overline{x_2} \& \overline{x_1}) \vee (x_3 \& \overline{x_2} \& x_1)$$

$$f(x) = \overline{x_2}$$

obrázek č. 2 - Karnaughova mapa - Aserce

Zde je rozdíl ještě razantnější, jelikož, jak z Karnaughovy mapy vyplývá, všechny proměnné jsou závislé na proměnné x_2 a ostatní vstupy nemají na výstupu žádný vliv.

Na dalším příkladu se to pokusím ještě jednou názorně vysvětlit a popsat a také vám na něm ukážu, jak se dají tvořit mintermy přes okraj Karnaughovy mapy (tato možnost je také velmi důležitá).

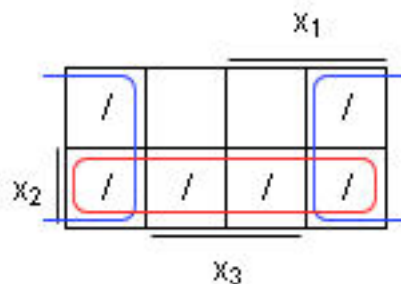
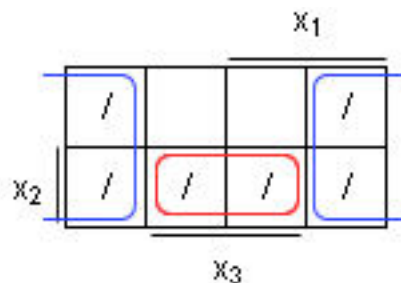


$$f(x) = x_1 \vee \overline{x_2} \& \overline{x_3}$$

obrázek č. 3 - Minimalizace funkce tří proměnných

Zde se prvně podíváme na červenou oblast. Je celá v poli proměnné x_1 a záleží tedy pouze na ní. Tak jak tomu bylo u předchozích dvou případů. Ale máme tu i druhý, modře vyznačený, minterm. Ten nejen že je spojen přes okraje Karnaughovy mapy, ale vyskytuje se v oblasti x_2 non (negovaná) a v oblasti x_3 non. Oblasti x_2 a x_3 jsou zcela mimo něj, proto jsou udávány jako negované. A v oblasti x_1 je jen napůl, tudíž na něj tato oblast nemá vliv.

Ještě se podíváme na jeden příklad, kdy by mohla vyniknout možnost spojování přes okraj:



$$f(x) = \overline{x_3} \vee (x_3 \& x_2)$$

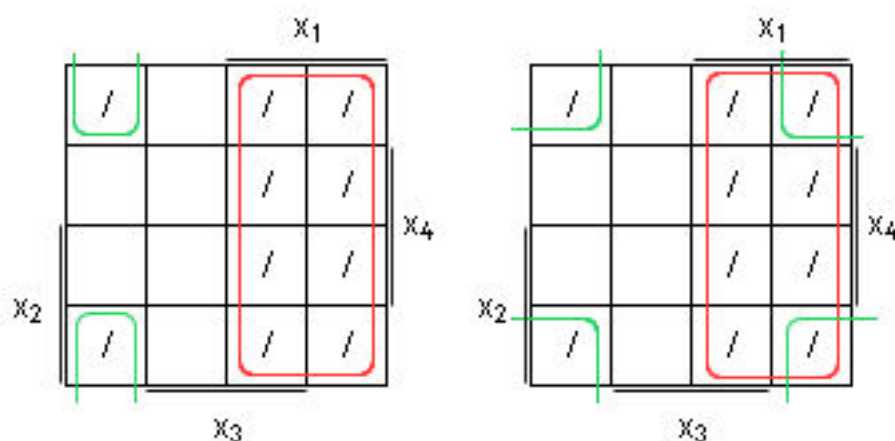
$$f(x) = \overline{x_3} \vee x_2$$

obrázek č. 4 - Snaha o výběr co největších mintermů

Zde vidíme přes okraj spojenou oblast x_3 non. Dále se již následující K. mapy liší. V jedné je použita dvojice, která je v oblasti x_2 a x_3 . Ve druhém případě

je ale označena čtveřice v oblasti x_2 . Z toho vyplývá, že se snažíme dělat co největší mintermy a že se můžou překrývat a že se jich snažíme udělat co nejméně, ale přitom pokrýt celou mapu (nenechat ani políčko, v němž je čárka, volné). Rozdíl vidíme i na rovnicích, ta druhá je výrazně jednodušší.

Ještě se podíváme na pár příkladů se čtyřmi vstupními proměnnými, ať se pořádně dostaneme do obrazu, protože bez tohoto cesta dále nevede.

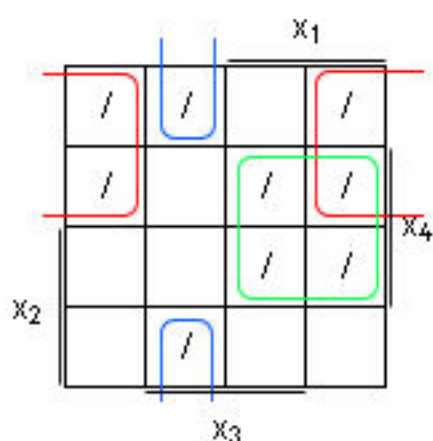


$$f(x) = x_1 \vee \overline{x_4} \& \overline{x_3} \& \overline{x_1}$$

$$f(x) = x_1 \vee \overline{x_4} \& \overline{x_3}$$

obrázek č. 5 - Spojování přes okraj

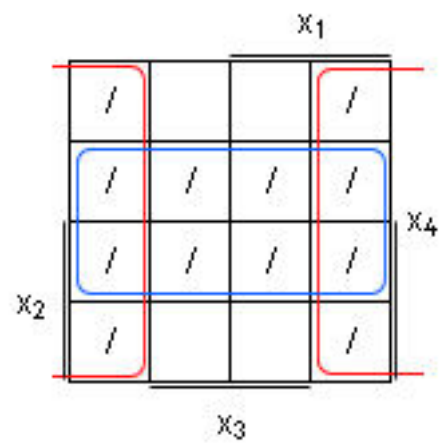
Na tomto obrázku bylo krásně ukázané spojení přes okraj Karnaughovy mapy. A také by z uvedeného příkladu mělo vyplynout, že práce s Karnaughovou mapou pro čtyři vstupní proměnné je stejná jako pro tři. Dám k dobru ještě další příklad, ať si to můžete pořádně prohlédnout:



$$f(x) = x_4 \& x_1 \vee \overline{x_3} \& \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \& x_3 \& \overline{x_1}$$

obrázek č. 6 - Ukázka minimalizace

No a na posledním příkladu si můžete prohlédnout, jak významné může být zjednodušení.



$$f(x) = x_4 \vee \overline{x_3}$$

obrázek č. 7 - Ukázka minimalizace