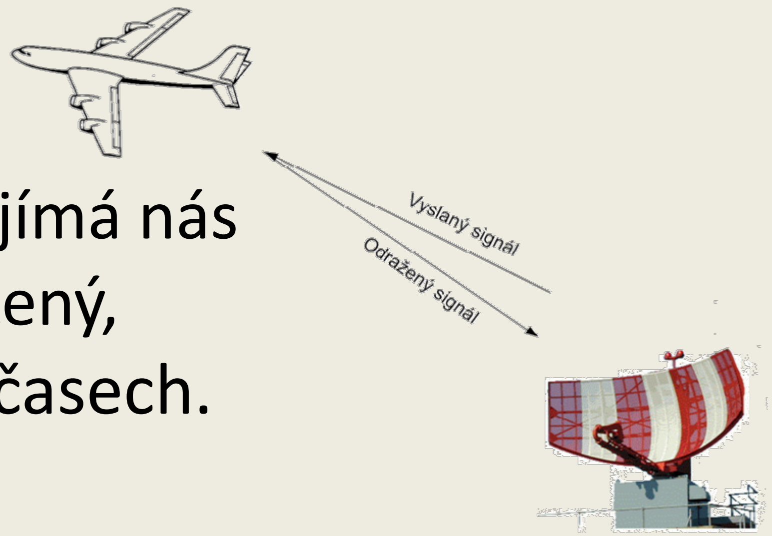
(Auto)korelační funkce

Náhodné procesy

- Korelace mezi náhodnými proměnnými má široké uplatnění v elektrotechnické praxi, kde se snažíme o porovnávání dvou signálů, které by měly být „stejné“.
- Příkladem může být radarová detekce nebo sonar.



- Máme nějaký vyslaný signál a zajímá nás jak detekovat (najít) signál odražený, který monitorujeme v různých časech.
- Tyto a další procesy jsou stochastické v čase. Zajímáme se o časový průběh (posloupnost) náhodných dějů.

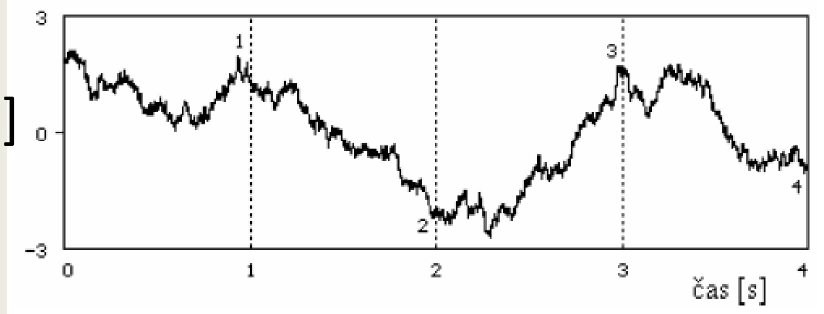
Náhodné procesy

- Př.: máme vysílaný signál x(t) a detekujeme odražený signál y(t).
- V případě radaru, pro detekovaný odražený signál od letadla platí: $y(t) = a \cdot x(t-D) + w(t)$, kde *a* je faktor útlumu, D je zpoždění mezi vyslaným a přijatým signálem a *w(t)* je šum.
- Tedy detekovaný signál je v podstatě náhodná veličina a my hledáme korelaci s x(t), abychom mohli určit vzdálenost letadla.
- Oba signály musí na sobě záviset, tedy musí být korelovány.

Náhodné procesy

Obr. 7. Čtyři realizace náhodného procesu

- Náhodný proces pak dělíme na:
  - Nestacionární
  - Stacionární
- V každém čase máme jinou náhodnou proměnnou, která je funkcí času: $\rho(X, Y, t_1, t_2)$
- Pro stacionární náhodný proces platí, že základní charakteristiky E[X] a Var[X] nezávisí na čase a $\rho(X, Y)$ je funkcí rozdílu času $t_1 - t_2$.
- Souběžný záznam několika realizací náhodné proměnné je nepraktický. Nahradím to různými čas. úseky jedné čas. realizace.
- Výpočet E[X] a Var[X] pak provedu z časových vzorků vzdálených τ.



Obr. 8. Realizace stacionárního náhodného procesu

(Auto)korelační funkce

- Už víme, že střední hodnota a rozptyl jsou počátečními charakteristikami (momenty) prvního řádu nebo centrální momenty druhého řádu.
- **Korelační funkce** pak je momentem druhého řádu dvojrozměrné náhodné proměnné ρ(X, Y).
- **Autokorelační funkce** je korelační funkce náhodného procesu hodnoceného ve dvou různých časových okamžicích.
- Budeme se zajímat jen o stacionární procesy, které nejsou funkcí času *t* a závisí jen na „zpoždění“ *τ*.

(Auto)korelační funkce

- Korelační funkce: $R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t) \cdot y(t + \tau)]$. Pro stacionární proces:

$$R_{xy}(\tau) = E\left\{x(t)\, y(t+\tau)\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

- Autokorelační fce: $R_{xx}(t, t+\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$. Pro stacionární proces:

$$R_{xx}(\tau) = E\left\{x(t)\, x(t+\tau)\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

- Pro diskrétní náhodné procesy lze odvodit podobné vztahy, kdy integrál nahradíme sumou.
- Platí to pro náhodné procesy, které jsou definovaný na čase od 0 do ∞.
- Pokud u korelační funkce přehodíme pořadí náhodných procesů *y* a *x*, pak lze odvodit:

$$R_{xy}(\tau) = E\left\{x(t) y(t+\tau)\right\} = E\left\{y(t_1) x(t_1 - \tau)\right\} = R_{yx}(-\tau)$$

(Auto)korelační funkce

- Říkáme, že autokorelační funkce je sudá pokud platí: $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$.
- Autokorelační funkce centrovaného $\Delta x(t) = x(t) - E\{x(t)\}$ náhodného procesu souvisí s autokorelační funkcí necentrovaného (obecného) procesu vztahem:

$$R_{\Delta x \Delta x}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(x(t) - \mu\right)\left(x(t+\tau) - \mu\right) dt = R_{xx}(\tau) - \mu^2$$

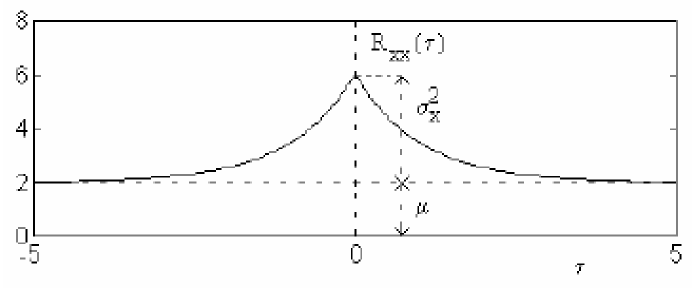
- $R_{\Delta x \Delta x}(\tau)$ nazýváme jako **kovarianční funkce** a platí pro ni, že $R_{\Delta x \Delta x}(0) = \sigma^2$.

(Auto)korelační funkce

- Pak lze dále definovat tzv. **normovanou kovarianční funkci**:

$$\rho_{\Delta x \Delta x}(\tau) = \frac{R_{\Delta x \Delta x}(\tau)}{\sigma^2}$$

- Hodnoty normované kovarianční funkce mají význam korelačních koeficientů mezi vzájemně posunutými hodnotami náhodného procesu. Pro stále větší *τ* dvou vzorků náhodného procesu je jejich vzájemná souvislost stále menší a tedy i kovarianční funkce.
- Je-li vstupní náhodný proces (signál) periodická funkce, pak autokorelační funkce je také periodická.
- Typický příklad autokorelační funkce:



Obr. 10. Autokorelační funkce obecného náhodného procesu

Aplikace (auto)korelační funkce

- Určení časového zpoždění mezi dvěma podobnými ději
  - Známe rychlost šíření signálu *v* a chceme určit vzdálenost objektu *d* (radar, sonar, ultrazvuková diagnostika).
  - Známe vzdálenost *d* dvou senzorů a chceme určit rychlost tělesa *v*, které se pohybuje mezi senzory.
- Spočítáme autokorelační funkci mezi signálem vyslaným a přijatým nebo mezi signály ze dvou senzorů.
- Výše uvedené jsou stacionární náhodné procesy a tedy autokorelační funkce bude záviset jen na zpoždění τ. Maximum autokorelační funkce nastává právě pro zpoždění $\tau = T_D = d/v$.

Aplikace (auto)korelační funkce

- Zjištění periodicity signálů
  - Máme náhodný proces, který převedeme na signál, který může být charakterizován velmi dlouhou periodou. Pak je obtížné ve velkém množství dat najít periodicitu signálu.
- Pokud je to stacionární proces, tak autokorelační funkce musí být periodická funkce zpoždění τ.
- Takováto autokorelační funkce bude mít silná lokální maxima pro $\tau = 0$ a pro násobky periody náhodného signálu T.

Aplikace (auto)korelační funkce

- Detekce periodického signálu v šumu.
  - Mohu opět určit periodu signálu
  - Mohu stanovit poměr signál/šum

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)]dt$$

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \hat{R}_{ss}(\tau) + \hat{R}_{sn}(\tau) + \hat{R}_{ns}(\tau) + \hat{R}_{nn}(\tau)$$

- Korelační funkce signálu a šumu a autokorelační funkce šum/šum nebudou periodické. Periodická bude jen autokorelační funkce signálu.

Korelační funkce ve frekvenční oblasti

- (Auto)korelační funkce je charakteristika náhodného procesu v **časové doméně**. Často je užitečné definovat charakteristiky náhodných procesů ve **frekvenční doméně** – nazývané jako tzv. **spektra**.
- K převedení korelačních funkcí z časové domény do frekvenční se používají tzv. **Fourierovy transformace**.
- Je to integrální transformace převádějící časovou funkci (originál) na frekvenční funkci komplexní proměnné (obraz).
- Def.:

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j\omega t)\, dt$$

ω = 2πf, j – komplexní jednotka

Korelační funkce ve frekvenční oblasti

- Vlastnosti X(ω)
  - Absolutní integrovatelnost (musí existovat integrál)
  - Po částech spojitá s konečným počtem bodů nespojitosti
  - Lineární
  - Inverzní Fourierova transformace

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega$$

Spektrální výkonová hustota

- Autokorelační funkce $R_{xx}(\tau)$ je funkcí čas. zpoždění
- Aplikujeme na ni Fourierovu transformaci.
- Dostaneme tzv. spektrální výkonovou hustotu $S_{xx}(\omega)$.
- Vztahy pro přímou a zpětnou Fourierovu transformaci autokorelační funkce se nazývají **Wiener-Chinčinovy vzorce**.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau\,,$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) \exp(j\omega\tau)\, d\omega$$

Spektrální výkonová hustota

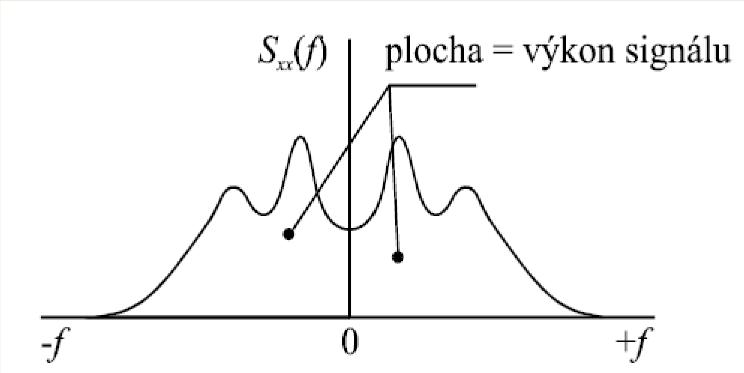
- Protože autokorelační funkce je sudá, pak spektrální výkonová hustota je také sudá funkce: $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$ a je definována pro kladné a záporné frekvence.
- Dá se ukázat, že $R_{xx}(0)$ je rovno výkonu náhodného procesu:

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(x(t) \right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\, df$$

- Pozn.: pro centrované náhodné procesy je $R_{\Delta x \Delta x}(0)$ rovno rozptylu náhodného procesu.

Spektrální výkonová hustota

- Plocha spektra v souřadnicích frekvence *f* představuje výkon náhodného procesu, jak je ilustrováno na obrázku.
- Př.: spektrální výkonová hustota bílého šumu



$$S_{ee}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_e^2 \delta(\tau) \exp\left(-j\omega\tau\right) d\tau = \sigma_e^2 \exp(-0) = \sigma_e^2$$

- Pro spojitý čas (nekonečné f. spektrum) je $S_{xx}(\omega)$ bílého šumu nekonečné. Při reálných měřeních je ale čas vždy diskrétní a tedy spektrum (frekvenční rozsah) omezený.

Spektrální výkonová hustota

- Wiener-Chinčinovy vztahy lze také odvodit pro dvojici náhodných procesů x(t) a y(t).
- $S_{xy}(\omega)$ nazýváme jako **křížová výkonová hustota spektra**

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j\omega\tau)\, d\tau \qquad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xy}(\omega) \exp(j\omega\tau)\, d\omega$$

- Pro nezávislé centrované procesy x(t) a y(t) je $S_{\Delta x \Delta y}(\omega) = 0$.
- Pokud zaměníme pořadí náhodných procesů, lze dokázat platnost $S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega)$, podobně jako u korelační funkce.

Počítání s více náhodnými proměnnými

Součet diskrétních X a Y

- Bude nás zajímat, jak bude vypadat pravděpodobnostní distribuce náhodné proměnné, která vznikne matematickou operací (sčítání, rozdíl, násobení, dělení) více náhodných proměnných, které mají definovanou svou vlastní pravděpodobnostní distribuci.
- Budeme hledat, jakou má distribuci diskrétní náhodná proměnná Z = X + Y.
- Náhodná proměnná *Z* bude nabývat hodnot $a_i + b_j = c$. Pravděpodobnostní funkce bude:

$$p_Z(c) = \sum_{(i,j):a_i+b_j=c} \mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j), \quad p_Z(c) = \sum_j \mathrm{P}(X = c - b_j, Y = b_j)$$

Součet diskrétních X a Y

- Tedy můžeme definovat pravidlo pro výpočet pravděpodobnostní funkce pro náhodnou proměnnou vzniklou součtem X a Y.

ADDING TWO INDEPENDENT DISCRETE RANDOM VARIABLES. Let X and Y be two independent discrete random variables, with probability mass functions p_X and p_Y. Then the probability mass function p_Z of $Z = X + Y$ satisfies

$$p_Z(c) = \sum_j p_X(c - b_j) p_Y(b_j),$$

where the sum runs over all possible values b_j of Y.

Součet diskrétních X a Y

- Př.: mějme X a Y a každá má pravděpodobnostní distribuci Geo(p). Hledáme distribuci proměnné Z = X + Y. Podle pravidla musí platit: $$\mathrm{P}(X+Y=k) = p_Z(k) = \sum_{\ell=1}^{\infty} p_X(k-\ell)p_Y(\ell).$$
- Protože $p_X(a) = 0$ pro $a \leq 0$, potom v sumaci členy s $l \geq k$ zmizí. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=k) &= \sum_{\ell=1}^{k-1} p_X(k-\ell)\cdot p_Y(\ell) = \sum_{\ell=1}^{k-1}(1-p)^{k-\ell-1}p\cdot(1-p)^{\ell-1}p \\ &= \sum_{\ell=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.\end{aligned}$$

- Všimněte si, že pravděpodobnostní distribuce pro X +Y už není geometrická.

Součet diskrétních X a Y

- Př.: Nechť máme náhodnou proměnnou X a Y každou popsanou distribucí Bin(n,p) a Bin(m,p).
- První distribuce popisuje *n* nezávislých pokusů s pravděpodobností *p*.
- Druhá distribuce popisuje *m* nezávislých pokusů s pravděpodobností *p*.
- Tedy pravděpodobnostní distribuce náhodné proměnné Z = X + Y mi popisuje *n* + *m* pokusů s pravděpodobností úspěchu *p*. Musí tedy mít tvar Bin(n+m,p).
- Důkaz: Každá Bin(n,p) a Bin(m,p) náhodná proměnná má stejnou distribuci jako součet *n* nezávislých resp. *m* nezávislých Ber(p) distribuovaných náhodných proměnných. Jinými slovy náhodná proměnná Z = X + Y má tedy stejnou distribuci jakou součet *n* + *m* nezávislých Ber(p) náhodných proměnných a tedy Z má náhodnou distribuci Bin(n+m,p).

Součet spojitých X a Y

- Budeme mít dvě spojité náhodné proměnné X a Y. Bude nás zajímat jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Z = X + Y.
- Dá se ukázat, že distribuční funkce náhodné proměnné Z bude dána vztahem:

$$F_Z(a) = \mathrm{P}(Z \leq a) = \mathrm{P}(X + Y \leq a) = \iint\limits_{(x,y):x+y\leq a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- Je to vlastně dvojité integrování přes *x* a pak přes *y.* Obě proměnné běží přes interval od <-∞, ∞> a zároveň *x*+*y*≤*a* (ekvivalentně *x*≤*a*-*y*). Pak:

$$F_Z(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{a-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Součet spojitých X a Y

- Pokud jsou X a Y nezávislé náhodné proměnné pak lze distribuční funkci vyjádřit pomocí marginálních hustot pravděpodobnosti a poslední integrál přepsat na:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\,\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

- Nakonec pro $-\infty < a < \infty$ dostaneme:

$$F_Z(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

Součet spojitých X a Y

- Derivací F_Z dostaneme vztah pro hustotu pravděpodobnosti.

Adding two independent continuous random variables. Let X and Y be two independent continuous random variables, with probability density functions f_X and f_Y. Then the probability density function f_Z of $Z = X + Y$ is given by

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

for $-\infty < z < \infty$.

- Je tedy zřejmé, že obecně součet dvou náhodných proměnných se stejnou distribucí nebude mít stejnou distribuci.

Součet spojitých X a Y

- Platí pro součet dvou nezávislých náhodných proměnných X a Y se standardním normálním rozdělením, že náhodná proměnná Z = X + Y bude mít také standardní normální rozdělení pravděpodobnosti?

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-y)^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}y^2}\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2y^2-2yz+z^2)}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

- Odečteme z exponentu $1/2z^2$ a závorku upravíme.

Součet spojitých X a Y

$$2y^2 - 2yz + \frac{1}{2}z^2 = \left[\sqrt{2}\left(y - \frac{z}{2}\right)\right]^2$$

- Zavedeme novou proměnnou: $t = \sqrt{2}(y - z/2)$

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2y^2 - 2yz + \frac{1}{2}z^2)} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}(y - z/2)\right]^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

- Pozor změna proměnné, musím si spočítat *dt*!!!

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2},$$

Součet spojitých X a Y

- Dostali jsme hustotu pravděpodobnosti normální standardní distribuce N(0,2):

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}z^2},$$

- Obecné pravidlo:

THE SUM OF INDEPENDENT NORMAL RANDOM VARIABLES. If X and Y are independent random variables with a normal distribution, then $X + Y$ also has a normal distribution.

- Dá se ukázat, že nezávislost X a Y není nutná podmínka a platí to i pro závislé X a Y.

Násobení spojitých X a Y

- Bude nás zajímat jak bude vypadat pravděpodobnostní distribuce nové náhodné proměnné Z = X·Y. Kde X a Y jsou **nezávislé** náhodné proměnné.
- Je to podobná úloha, kterou jsme řešili na str. 37 přednášky 2. Poznali jsme, jak spočítat střední hodnotu náhodné proměnné Z=X·X (pozn.: uvědomte si, že náhodné proměnné X a X jsou vzájemné závislé a tedy **nelze** psát E[Z] = E[X]·E[X] = $E[X]^2$. Pokud by byly X a X nezávislé tak by rovnost platila, ale v konkrétním příkladu čtverců jsou velikosti stran vzájemně závislé).
- Dá se ukázat, že hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Z je dána netriviálním vztahem:

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z(1 + 2\ln 10 - \ln z)}{100} = \frac{\ln 100 - \ln z}{100}$$

Násobení spojitých X a Y

- Nalezení hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné Z = X·Y lze zobecnit:

PRODUCT OF INDEPENDENT CONTINUOUS RANDOM VARIABLES. Let X and Y be two independent continuous random variables with probability densities f_X and f_Y. Then the probability density function f_Z of $Z = XY$ is given by

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y\left(\frac{z}{x}\right) f_X(x) \frac{1}{|x|} \, \mathrm{d}x$$

for $-\infty < z < \infty$.

Podíl spojitých X a Y

- Bude nás zajímat jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Z = X/Y.
- Pokud jsou X a Y nezávislé, tak také X a 1/Y musí být nezávislé.
- Pak můžeme použít pravidlo pro hledání hustoty pravděpodobnosti součinu dvou nezávislých náhodných proměnných a dostaneme:

QUOTIENT OF INDEPENDENT CONTINUOUS RANDOM VARIABLES. Let X and Y be two independent continuous random variables with probability densities f_X and f_Y. Then the probability density function f_Z of $Z = X/Y$ is given by

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zx) f_Y(x) |x| \, \mathrm{d}x$$

for $-\infty < z < \infty$.

Cauchyho distribuce

- Př.: nechť X a Y jsou nezávislé náhodné proměnné mající každá standardní normální distribuci pravděpodobnosti. Jaká bude distribuce pravděpodobnosti náhodné proměnné Z = X/Y? Dá se ukázat, že to bude tzv. standardní Cauchyho distribuce:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2x^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^2+1)x^2} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^2+1)x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{z^2+1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z^2+1)x^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(z^2+1)}. \end{aligned}$$

Cauchyho distribuce

- Obecně Cauchyho pravděpodobnostní distribuce je definována:

DEFINITION. A continuous random variable has a *Cauchy distribution* with parameters α and $\beta > 0$ if its probability density function f is given by

$$f(x) = \frac{\beta}{\pi\left(\beta^2 + (x-\alpha)^2\right)} \quad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

We denote this distribution by $Cau(\alpha, \beta)$.

- Je speciální tím, že nemá střední hodnotu a své uplatnění nalézá v částicové fyzice.

Zákon velkých čísel

Motivace

- Ze zkušenosti víme, že pokud opakujeme nějaký experiment založený na měření nějakého přírodního jevu (např. interferometrické měření rychlosti světla), tak po vykonání mnoha identických opakování měření dostaneme pokaždé trošku jiný výsledek.
- V praxi provedeme měření mnohokrát a najdeme aritmetický průměr všech takto získaných výsledků experimentů.
- Ve skutečnosti máme sadu *n* nezávislých náhodných proměnných, u kterých neznáme jejich pravděpodobnostní distribuce.
- Zákon velkých čísel pak dává do souvislosti skutečnost, že čím více opakování nezávislých experimentů provedeme, tak s větší pravděpodobnosti spočítaný arit. průměr se bude blížit střední hodnotě náhodné proměnné.

Průměr vs. střední hodnota

- Mějme sekvenci náhodných proměnných $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. Každé X_i představuje *i*-té opakování stejného experimentu (např. měření nějaké fyzikální veličiny). Experimentální podmínky každého měření musí být identické a výsledek každého měření nesmí nijak ovlivnit výsledek následných měření. Potom náhodné proměnné X_i jsou nezávislé. Zároveň všechny X_i mají stejnou pravděpodobnostní distribuci.
- Nechť každá X_i má distribuční funkci *F*, střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ.
- Potom a. průměr prvních *n* náhodných proměnných je: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$
- Z podmínky linearity střední hodnoty plyne:

$$\mathrm{E}\left[\bar{X}_n\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right] = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \mu$$

Průměr vs. střední hodnota

- Podle pravidla výpočtu rozptylu součtu *n* náhodných proměnných plyne:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Expectation and variance of an average. If $\bar{X}_n$ is the average of n independent random variables with the same expectation μ and variance σ^2, then

$$\mathrm{E}\left[\bar{X}_n\right] = \mu \quad \text{and} \quad \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Průměr vs. střední hodnota

- Tedy střední hodnota a. průměru *n* výsledků nezávislých měření X_i je rovna střední hodnotě jednotlivého náhodného experimentu.
- Na druhou stranu směrodatná odchylka průměru je menší o $\sqrt{n}$. Tedy vícenásobné opakování měření mi bude dávat pořád stejnou střední hodnotu, ale rozptyl naměřených hodnot mi bude s počtem měření konvergovat k nule.
- Tedy čím více nezávislých měření provedu, pak s odmocninou z počtu měření se mi bude zmenšovat interval (směrodatná odchylka), ve kterém se mohou vyskytovat naměřené náhodné proměnné.
- Je zřejmé, že součet náhodných proměnných každé s identickou pravděpodobnostní distribucí mi musí dát novou distribuční funkci.
- Bude nás zajímat jak bude vypadat hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $\overline{X_n}$. Jako příklad uveďme Gam(2,1) rozdělení s hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{for } x \geq 0$$

Průměr vs. střední hodnota

- Gam(2,1) je distribuce, jejíž každá náhodná proměnná je dána součtem dvou nezávislých Exp(1) náhodných proměnných.

$$
\begin{aligned}
f_{Z_2}(z) = f_{T_1+T_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_1}(z-y) f_{T_2}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^z \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(z-y)} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \\
&= \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda z} \int_0^z \mathrm{d}y = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z}.
\end{aligned}
$$

DEFINITION. A continuous random variable X has a *gamma distribution* with parameters $\alpha > 0$ and $\lambda > 0$ if its probability density function f is given by $f(x) = 0$ for $x < 0$ and

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \qquad \text{for } x \geq 0,$$

where the quantity $\Gamma(\alpha)$ is a normalizing constant such that f integrates to 1. We denote this distribution by $Gam(\alpha, \lambda)$.

Průměr vs. střední hodnota

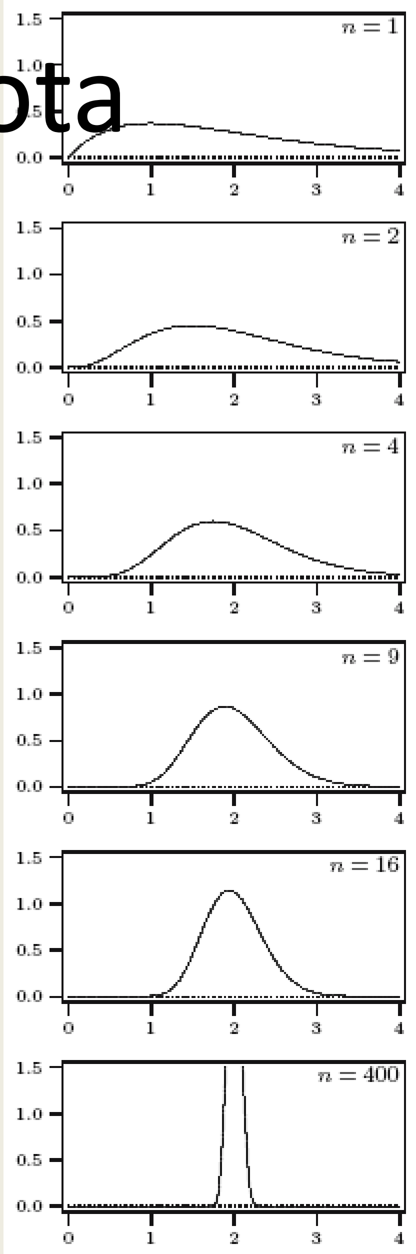
- Tedy náhodná proměnná $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ je dána součtem 2*n* nezávislých Exp(1) náhodných proměnných a má distribuci Gam(2n,1) s hustou pravděpodobnosti:

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{2n-1}\mathrm{e}^{-x}}{(2n-1)!} \qquad \text{for } x \geq 0.$$

- Budeme hledat hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné $\overline{X_n} = {}^{S_n}/_{n}$. Aplikací pravidla o transformaci náhodné proměnné dostaneme:

$$f_{\bar{X}_n}(x) = n f_{S_n}(nx) = \frac{n\,(nx)^{2n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}}{(2n-1)!} \qquad \text{for } x \geq 0$$

Průměr vs. střední hodnota



- Takto jsme explicitně získaly hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné $\overline{X_n}$.
- Počet opakování měření *n* je parametr hustoty pravděpodobnosti.
- Pro rostoucí *n* se mi hustota pravděpodobnosti mění. Stává se stále užší kolem střední hodnoty, která je pro Gam(2,1) rovna 2.
- Pro $\mathrm{n} \to \infty$ se mi hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $\overline{X_n}$ změní na konstantu μ.

Čebyševova nerovnost

- Tento teorém mi kvantifikuje jak moc se mi „zúží“ hustota pravděpodobnosti, při nezávislém opakování stejného náhodného experimentu.
- Ke kvantifikaci použijeme podmínku, jaká je pravděpodobnost, že náhodná proměnná Y bude ležet mimo interval (E[Y]-a, E[Y]+a).

CHEBYSHEV'S INEQUALITY. For an arbitrary random variable Y and any $a > 0$:

$$P(|Y - E[Y]| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \mathrm{Var}(Y) .$$

Čebyševova nerovnost

- Důkaz: nechť f_Y je hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Y a μ je totožné s E[Y]. Pak:

$$\mathrm{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_{|y-\mu|\geq a} (y-\mu)^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\geq \int_{|y-\mu|\geq a} a^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y = a^2 \mathrm{P}(|Y-\mu| \geq a)\,.$$

- Když obě strany podělíme a^2 dostaneme Čebyševovu nerovnost.
- Označme Var(Y) jako σ^2. Pravděpodobnost, že Y leží v intervalu širokém $k \cdot \sigma$ kolem μ , kde k je malé celé číslo, je rovna: $\mathrm{P}(|Y-\mu| < k\sigma) = 1 - \mathrm{P}(|Y-\mu| \geq k\sigma)$ Pokud a=kσ, pak z Čebyševovy nerovnosti máme: $\mathrm{P}(|Y-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(Y)}{k^2\sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}.$

Čebyševova nerovnost

- Pro rostoucí *k* = 2, 3, 4, … *n* pravá strana poslední rovnice konverguje k jedničce.
- Na základě Čebyševovy nerovnosti můžeme vyslovit silnější tvrzení:

  THE "$\mu \pm$ A FEW σ" RULE. Most of the probability mass of a random variable is within a few standard deviations from its expectation.

- Jinými slovy většina plochy hustoty pravděpodobnosti leží v intervalu omezeném nižší mezí v nerovnici: $\mathrm{P}(|Y-\mu| < k\sigma)$

Zákon velkých čísel

- Mějme posloupnost *n* nezávislých náhodných proměnných s identickou pravděpodobnostní distribucí, se střední hodnotu *μ* a rozptylem σ^2.
- Budeme aplikovat Čebyševovu nerovnost na a. průměr $\overline{X_n}$, E[$\overline{X_n}$] = μ, Var($\overline{X_n}$) = σ^2/n a ε>0, pak: $$\mathrm{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|>\varepsilon\right)=\mathrm{P}\left(\left|\bar{X}_n-\mathrm{E}\left[\bar{X}_n\right]\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}\left(\bar{X}_n\right)=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$
- Pravá strana rovnice konverguje k nule pro *n* rostoucí do nekonečna a *ε* může být jakékoliv.

Zákon velkých čísel

- Pak dostáváme zákon velkých čísel:

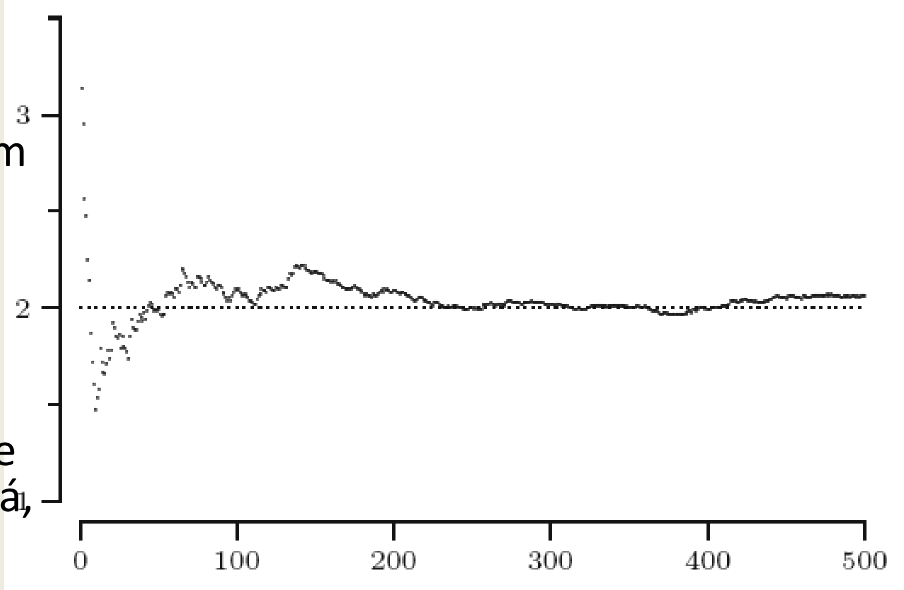
THE LAW OF LARGE NUMBERS. If $\bar{X}_n$ is the average of n independent random variables with expectation μ and variance σ^2, then for any $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0.$$

- Interpretace zákona velkých čísel na příkladu.
- Provádějme nějaký složitý experiment, kdy měříme nějakou fyzikální veličinu. Po mnoha opakováních vidíme, že měřená hodnota se pohybuje v blízkosti „správné“ hodnoty, kterou očekáváme.
- Předpokládejme, že naše měření má hypoteticky Gam(2,1) distribuci. To co mi chceme získat naším n-krát opakovaným měřením, je vlastně střední hodnota Gam(2,1) na základě průměru výsledků náhodných experimentů.

Zákon velkých čísel

- Takovýto experiment, lze nasimulovat.
- Uděláme 500 měření a pro každé *n* spočítáme průměr prvních *n* naměřených hodnot a vyneseme do grafu jako funkci *n*.
- Víme, že E[Gam(2,1)] = 2.
- Z grafu je patrné, že už po 200 opakováních je průměr velmi blízko k μ.



- Když budeme pokračovat dále, tak „průměry“ budou oscilovat ve stále menším intervalu kolem μ.
- Ale to nevylučuje, že po 1000 opakováních mi „průměr“ nevyskočí na třeba 2,3.
- Zákon velkých číslech mi jen říká, že pravděpodobnost, že průměr mnoha měřeních se bude blížit střední hodnotě, se bude blížit limitně jedné. Ale to neznamená, že nemusím mít smůlu a zrovna naměřit špatné hodnoty.

Zákon velkých čísel

- Platí zákon velkých čísel i pro sekvenci náhodných proměnných, jejichž pravděpodobnostní distribuce nemá střední hodnotu nebo je nekonečně velká?
- Cauchyho distribuce nemá střední hodnotu – viz strana 33.
- Provedeme simulaci jako v předchozím příkladě.
- Vidíme, že průměry mají tendenci konvergovat k bodu symetrie Cauchyho distribuce, ale je to jenom iluze.
- Každou chvíli další hodnota X_i padne daleko od čísla 2. Pokud bychom provedli simulaci pro ještě větší n, tak výsledek by byl stejný. Nelze pozorovat žádnou konvergenci.
- Tedy zde zákon velkých čísel neplatí.