

# Vysokofrekvenční lineární obvody

# Ustálený stav ve vysokofrekvenčních lineárních obvodech buzených harmonickým signálem

Obecný průběh okamžitých veličin

$u = u(t)$  – okamžitá hodnota napětí

$I = i(t)$  – okamžitá hodnota proudu

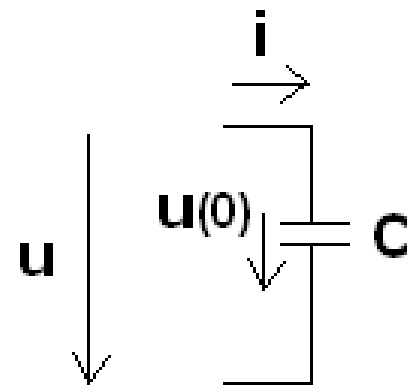
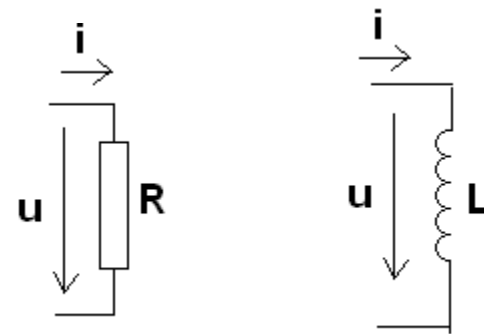
pro lineární rezistor platí:  $u = i R$

pro lineární indukčnost:  $u = L \frac{di}{dt}$

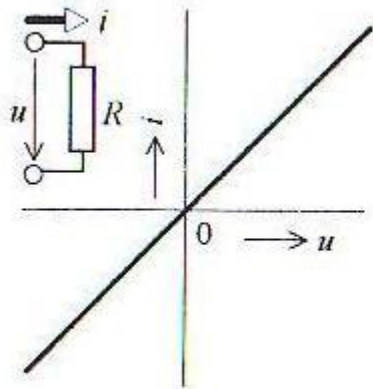
pro lineární kapacitor:  $i = C \frac{du}{dt}$

$$C = \frac{Q}{u}$$

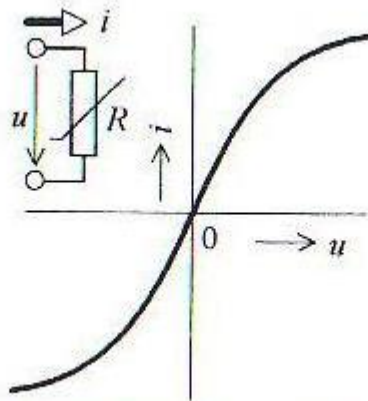
$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$



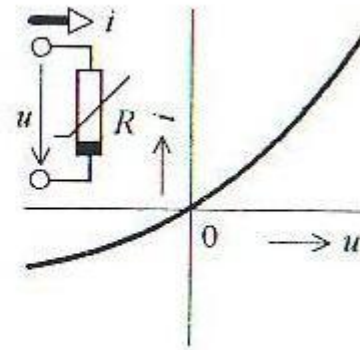
# Rezistor



a) linear



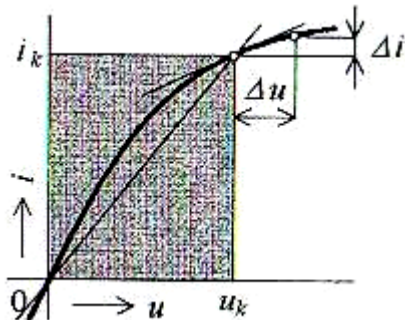
b) non-linear symmetrical



c) non-linear asymmetrical

lineární rezistor:  $u(t) = R i(t)$

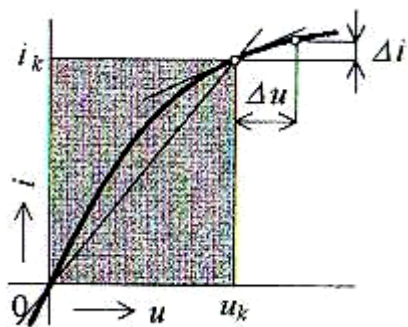
nelineární rezistor:  $R(i) = \frac{u}{i} = \frac{f(i)}{i}$ ,  $R(i)$  - statický elektrický odpor



- pro okamžitý výkon lze napsat:  $P = ui = R(i)i^2$
- pro hodnoty napětí a proudu  $u_k$  a  $i_k$  je výkon dán vyšrafovanou plochou v grafu  $i(u)$ .

Je možné definovat diferenciální elektrický odpor  $R_d(t)$  podle vztahu:

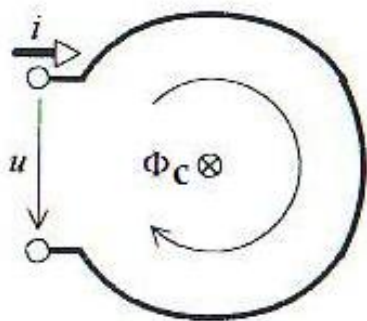
$$R_d(i) = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di},$$



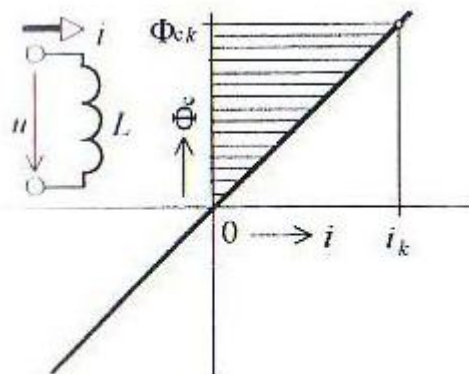
Používá se pro malé změny napětí kolem pevného (pracovního bodu) .

# Indukčnost

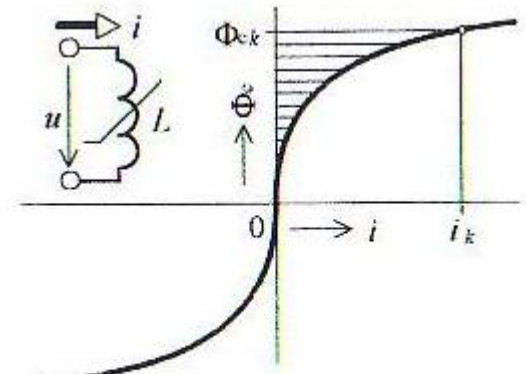
- Pasivní obvodový element.
- Dodaná elektrická energie se transformuje na energii vytvořeného magnetického pole.
- Je charakterizována vztahem mezi magnetickým tokem  $\Phi_c$  plochou, kterou obepíná uzavřená proudová smyčka, a proudem  $i$  tekoucí touto smyčkou.



$$\Phi_c = f(i)$$



a) linear



b) non-linear

- Funkce  $f(i)$  může být lineární funkcí pro lineární induktor – vzduchová cívka,
- nebo může být nelineární funkcí pro nelineární induktor – cívka s feromagnetickým jádrem

- Pro lineární induktor platí:  $\Phi_c = \int \int_s \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \quad (\text{Wb})$

$$\Phi_c = L * i \quad L [H] - \text{se nazývá vlastní indukčnost}$$

- Pro nelineární induktor může být vlastní indukčnost definována stejně, ale je funkcí proudu - nazývá se „statická vlastní indukčnost“.

$$L(i) = \frac{\Phi_c(i)}{i}$$

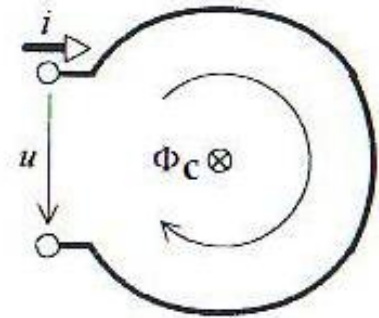
- Může být definována diferenciální indukčnost vztahem:

$$L_d(i) = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_c(i)}{\Delta i} = \frac{d\Phi_c}{di}$$

- $L_d$  popisuje sklon funkce  $\Phi_c(i)$  v závislosti na proudu.

- Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$u_0 = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$



$u_0$  – je indukované elektromotorické napětí ve vodivé smyčce, která obepíná plochu indukčního toku  $\Phi_c$

- Pro napětí  $u(t)$  ve spotřebičové orientaci na vstupu smyčky platí, pokud zanedbáme odpor vodiče:

$$u(t) = -u_0(t)$$

$$u(t) = \frac{d\Phi_c}{dt}$$

$$u(t) = \frac{d\Phi_c(t)}{dt} = \frac{d\Phi_c(i)}{di} \frac{di(t)}{dt} = L_d(i) \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{d}{dt}[L(i) i] = \left[ L(i) + i \frac{dL(i)}{di} \right] \frac{di(t)}{dt}$$

$$L_d(i) = L(i) + i \frac{dL(i)}{di}.$$

Tato rovnice vyjadřuje vztah mezi statickou indukčností a dynamickou (diferenciální) indukčností.

Pro lineární induktor platí následující vztah:  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$

Integrací Faradayova zákona dostaneme rovnici pro  $\Phi_c(t)$ .  $u(t) = \frac{d\Phi_c}{dt}.$   
 Pozn.: musíme znát indukční tok  $\Phi_c(t_0)$  v čase  $t_0$ :

$$\Phi_c(t) = \Phi_c(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau.$$

- Pro proud  $i$  platí obecně:  $i(t) = \frac{\Phi_c(i)}{L(i)}$

z toho plyne: 
$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

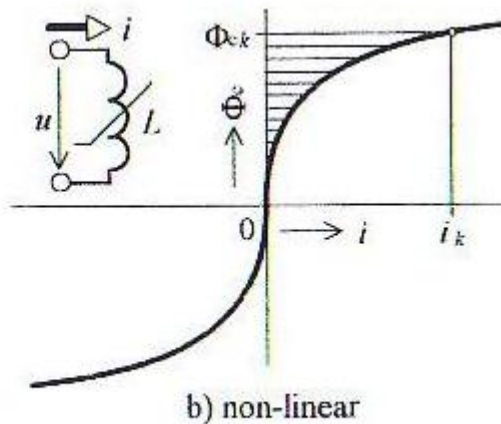
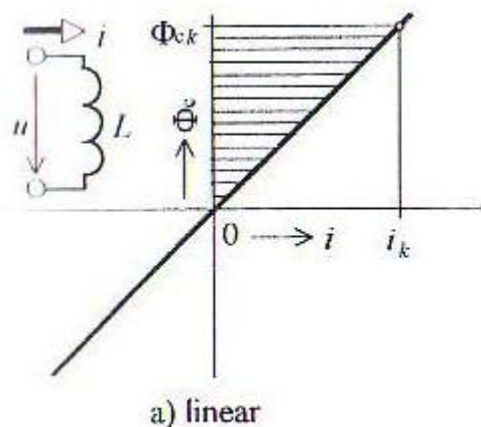
- Energie načerpaná do induktoru je dána prací která byla vykonána na vytvoření jejího magnetického pole.
- Předpokládáme nulový magnetický tok v čase  $t_0=0$ .
- Tuto energii  $W_m(t)$  vyjádříme vztahem:

$$W_m(t) = A(t) = \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_0^{\Phi_c(t)} i(\Phi_c) d\Phi_c.$$

kde  $d\Phi_c = u(t) dt$

$$W_m(t) = A(t) = \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_0^{\Phi_c(t)} i(\Phi_c) d\Phi_c.$$

Energie magnetického pole  $W_m(t_k)$  dosažená v čas  $t_k$  je dána velikostí vyšrafované plochy v grafech  $\Phi_c(i)$ :



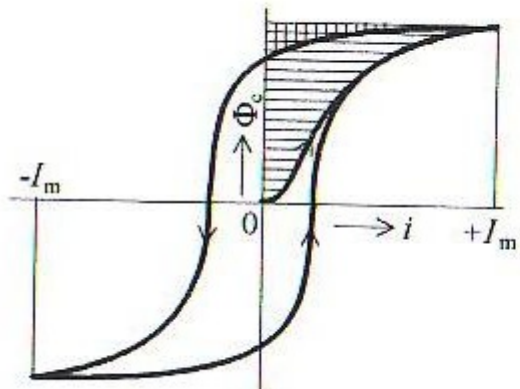
Během snižování energie magnetického pole při poklesu  $\Phi_c(i)$  je tato energie vrácena do obvodu.

- Pro akumulovanou energii  $W_m(t)$  v lineárním induktoru platí :

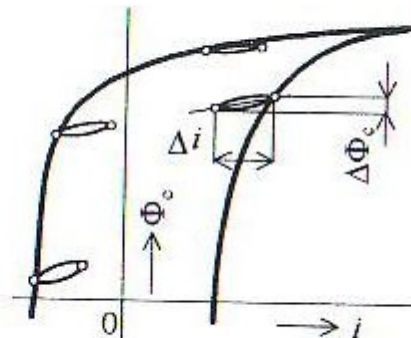
$$W_m(t) = A(t) = \int_0^t u(\tau) i(\tau) d\tau = \int_0^{\Phi_c(t)} i(\Phi_c) d\Phi_c.$$

$$W_m(t) = \frac{1}{L} \int_0^{\Phi_c(t)} \Phi_c d\Phi_c = \frac{1}{2L} \Phi_c^2(t) = \frac{1}{2} L i^2(t).$$

kde pro lineární induktor platí:  $i(\Phi_c) = \Phi_c/L$

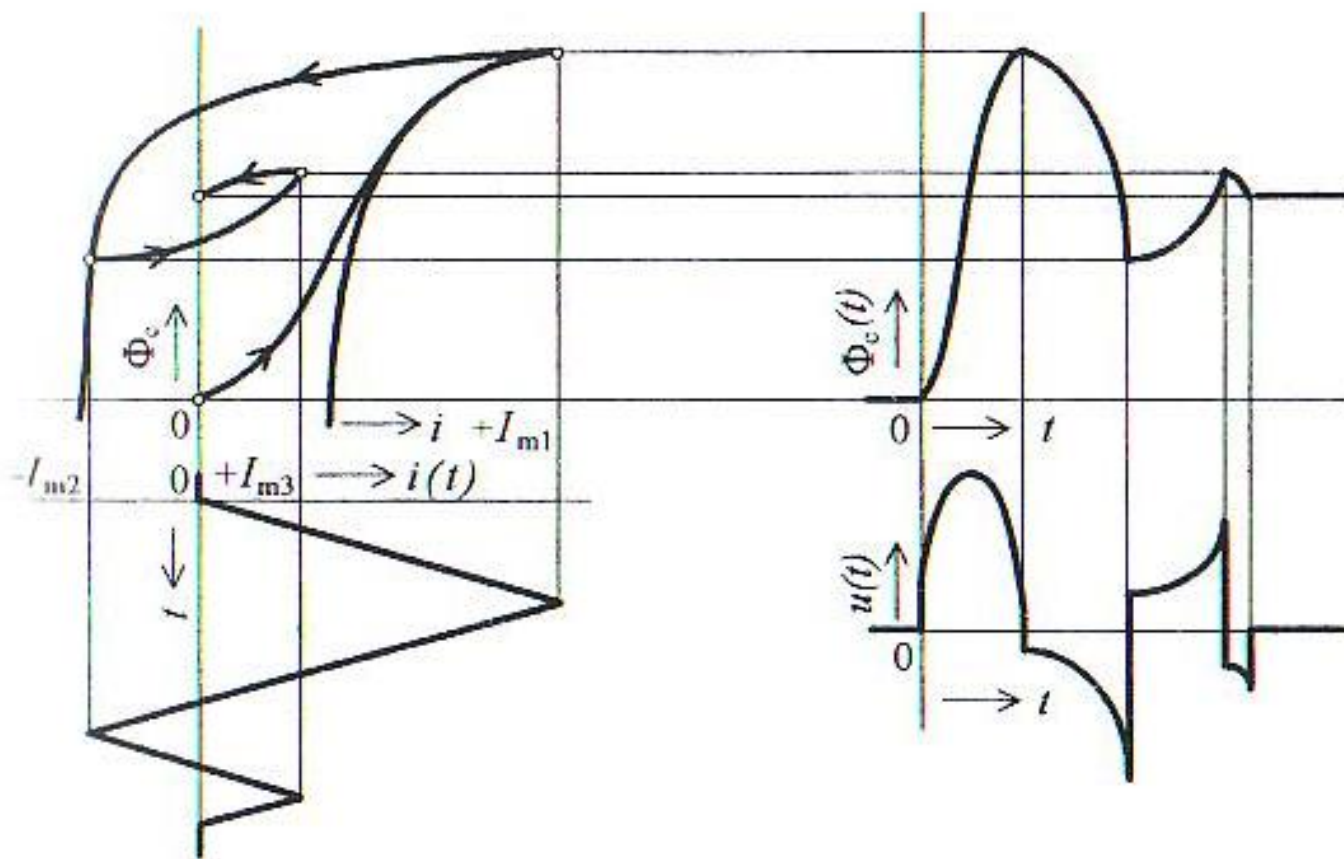


*Hysterezní smyčka v případě feromagnetického jádra.*



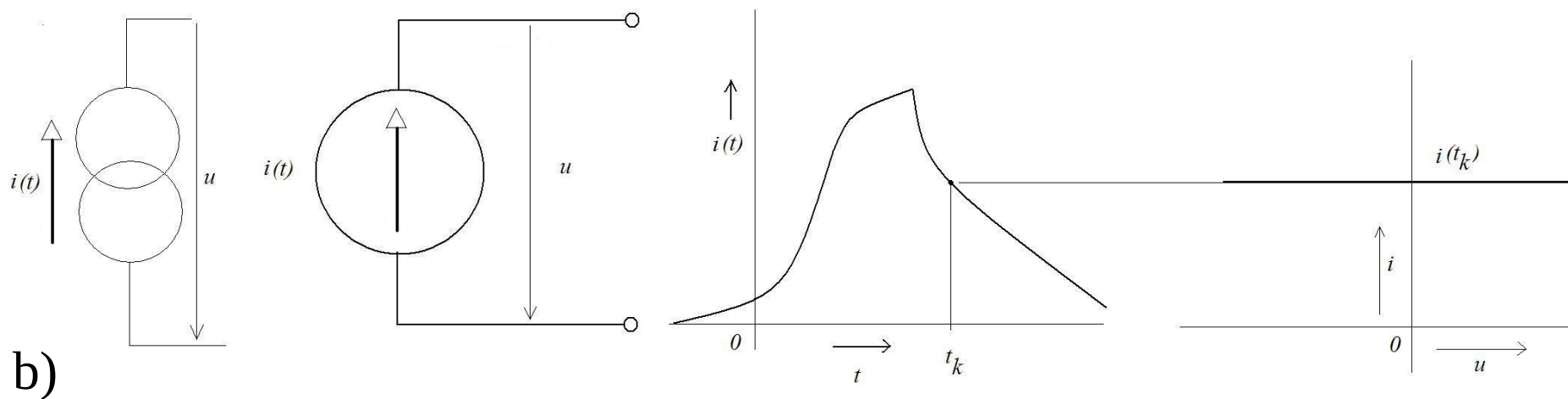
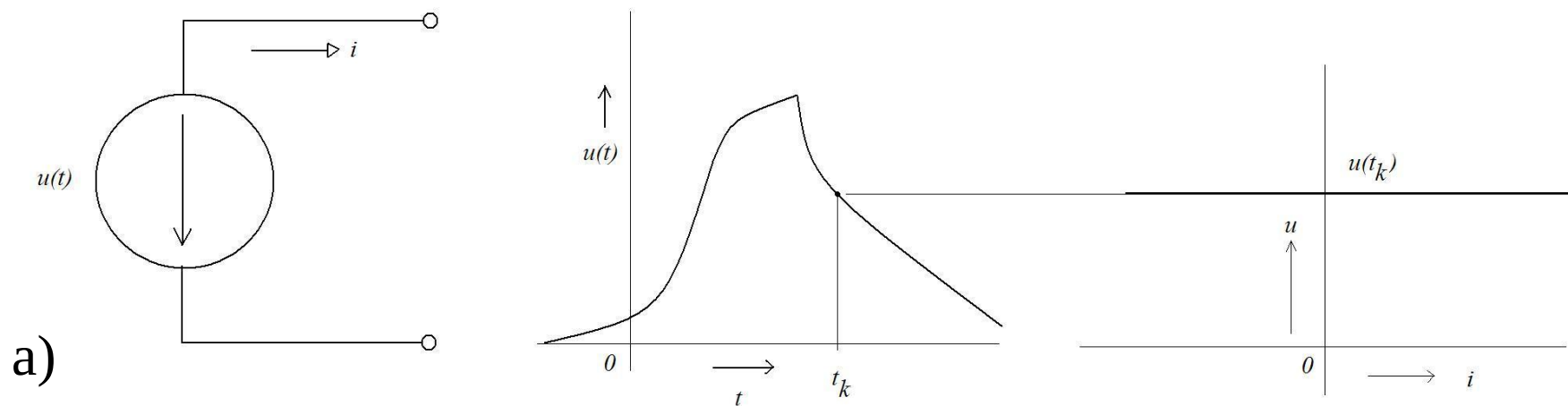
*Málo hysterezní smyčky pro Omezený rozkmit proudu cívkou.*

- V jádře vznikají tepelné ztráty.
- Je to z důvodu, že máme různé hodnoty energie dodané a odevzdané při opačném pohybu po hysterezní křivce.
- Z toho důvodu je třeba do modelu induktoru přidat rezistivitu, i když má vinutí zanedbatelný odpor.



Příklad nesymetrického buzení induktoru s feromagnetickým s hysterezí.

- a) ideální zdroj napětí
- b) ideální zdroj proudu



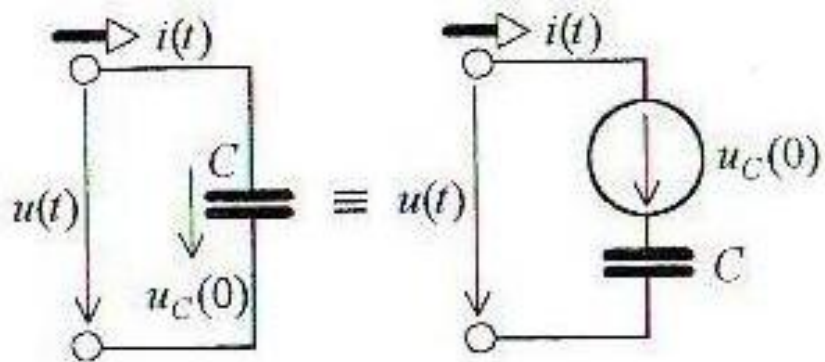


Fig. 6.2.3. Equivalence of a capacitor with non-zero initial voltage

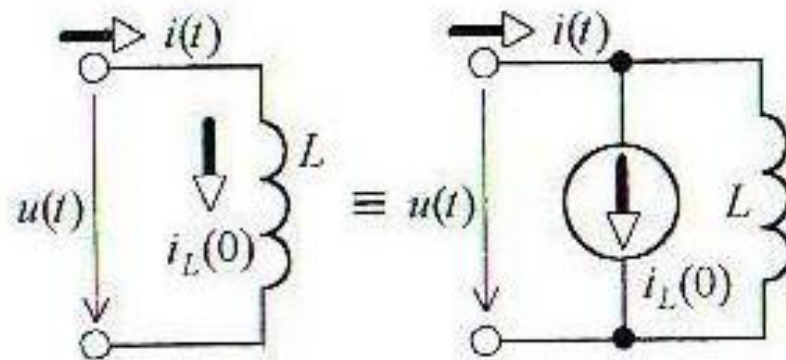
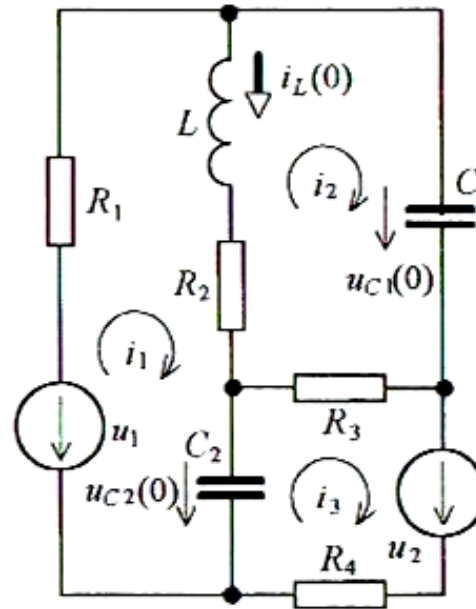


Fig. 6.2.4. Equivalence of an inductor with non-zero initial current

Při řešení obvodů pro obecné průběhy el. veličin musíme pro konkrétní případ znát počáteční podmínky u akumulacních prvků jako jsou indukčnosti a kapacity.

# Řešení obecného lineárního obvodu

metoda smyčkových proudů

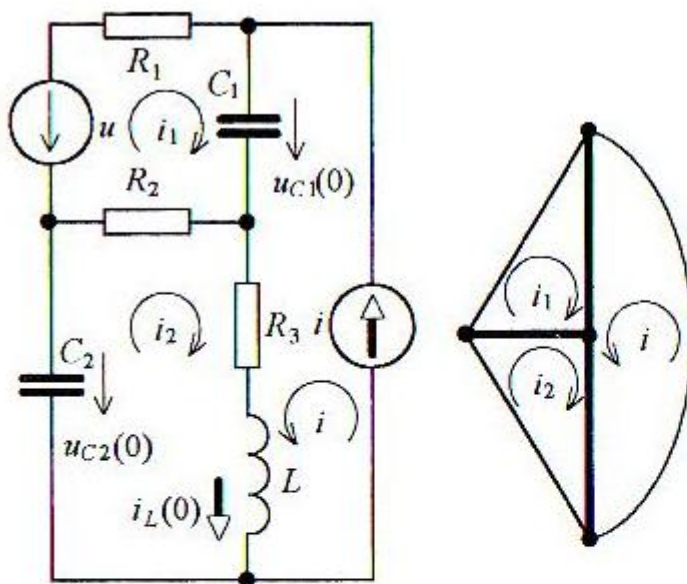


$$R_1 i_1 + L \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + R_2 (i_1 - i_2) + u_{C2}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t (i_1 - i_3) d\tau - u_1 = 0 ,$$

$$u_{C1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 d\tau + R_3 (i_2 - i_3) + R_2 (i_2 - i_1) + L \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} = 0 ,$$

$$R_4 i_3 - u_{C2}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t (i_3 - i_1) d\tau + R_3 (i_3 - i_2) + u_2 = 0 .$$

- Obvod s větví obsahující zdroj proudu – tento proud není neznámá veličina.
- Řešíme méně rovnic.
- Nebudeme psát rovnici pro smyčku, která by obsahovala větev se zdrojem proudu.

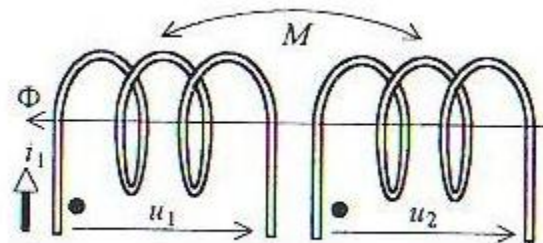
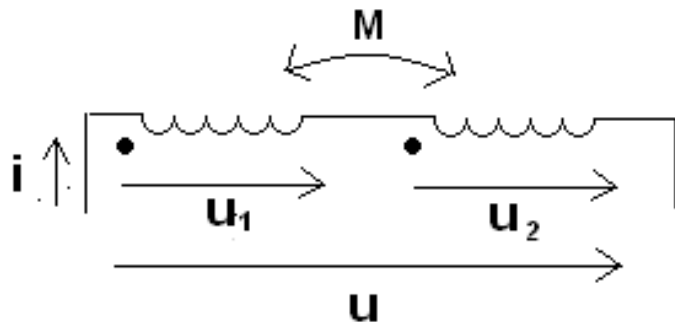


$$-u + R_1 i_1 + u_{C1}(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t (i_1 + i) d\tau + R_2(i_1 - i_2) = 0,$$

$$-u_{C2}(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 d\tau + R_2(i_2 - i_1) + R_3(i_2 + i) + L \frac{d(i_2 + i)}{dt} = 0.$$

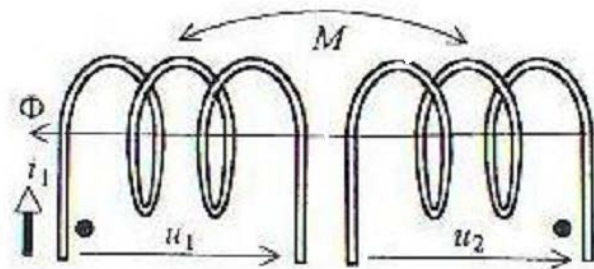
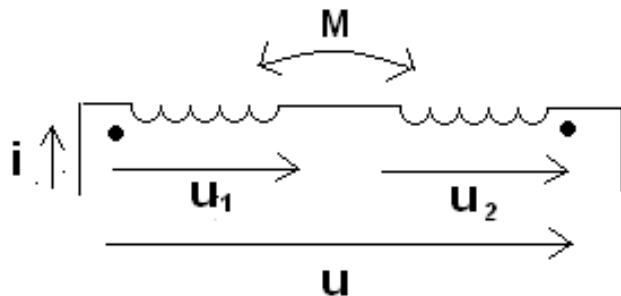
# Vázané obvody

a)

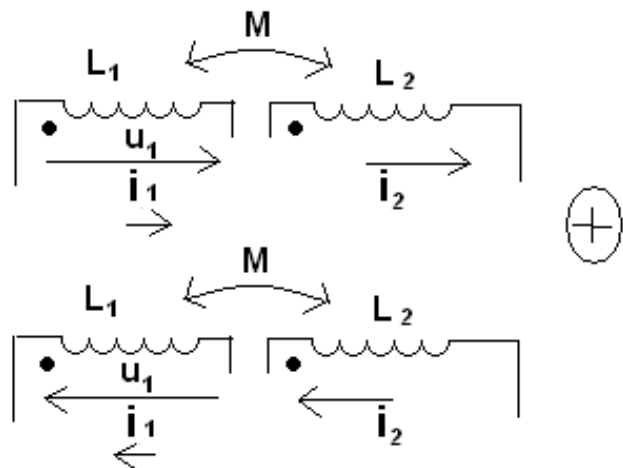


$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

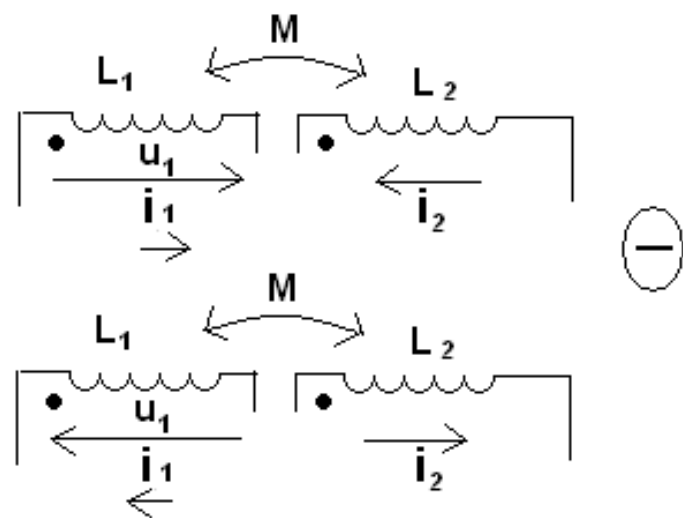
b)



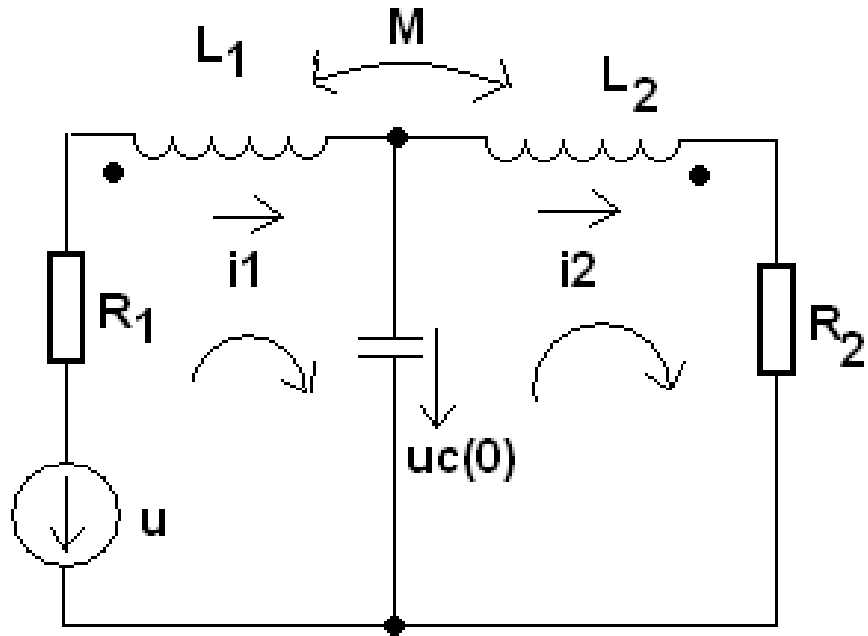
$$u = u_1 + u_2 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

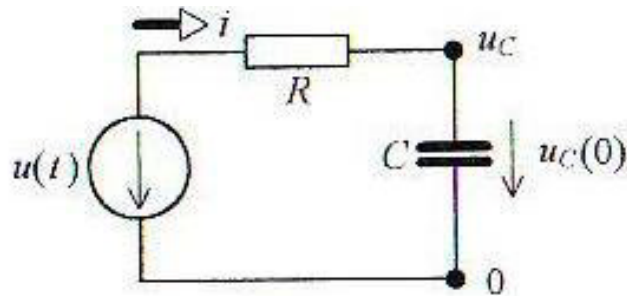


$$-u + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) d\tau = 0$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 - u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) d\tau = 0$$

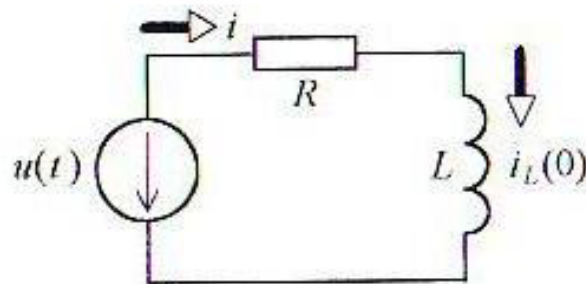
# Obvody prvního řádu

pouze jeden typ akumulárního prvku



$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

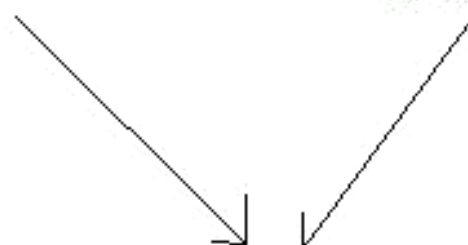
$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C - u(t)}{R} = 0 \quad \text{or} \quad RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t).$$



$$R i + L \frac{di}{dt} - u(t) = 0, \quad \text{or} \quad \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{u(t)}{R}.$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t).$$

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{u(t)}{R}.$$



$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t).$$

**obecný zápis obou  
diferenciálních rovnic**

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

**homogenní rovnice  
bez pravé strany**

$$y_0(t) = K e^{-t/\tau}$$

**řešení homogenní rovnice**

$\tau$  -časová konstanta

$K$  -integrační konstanta

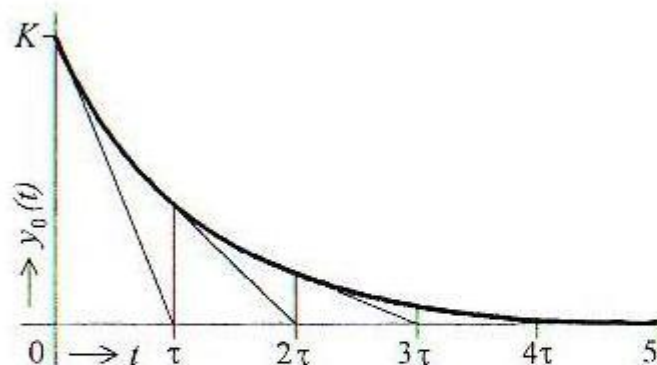
**obvod s kapacitou**

$$\tau = CR$$

**obvod s indukčností**

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

## fyzikální význam časové a integrační konstanty



$$y(t) = y(0+) e^{-t/\tau} \quad \text{for } t > 0.$$

homogenní rovnice řeší případ odezvy po vypnutí pravé strany  
(buzení)

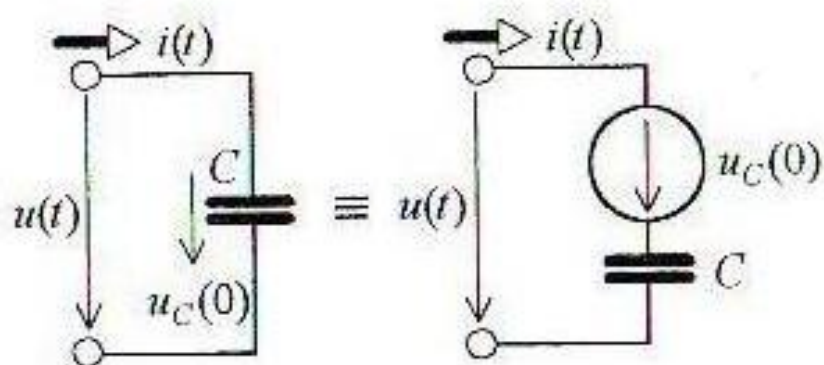


Fig. 6.2.3. Equivalence of a capacitor with non-zero initial voltage

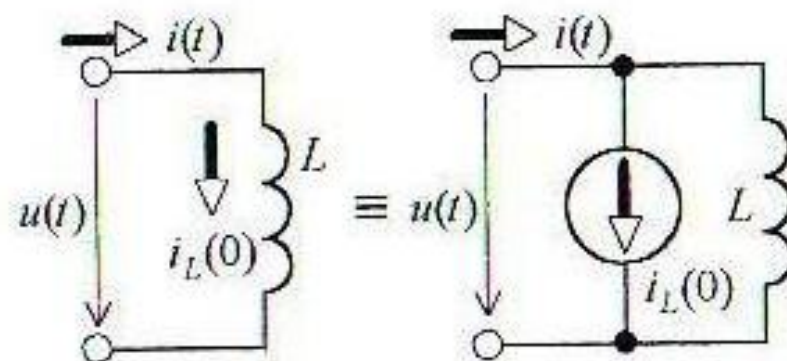


Fig. 6.2.4. Equivalence of an inductor with non-zero initial current

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x(t) = X_m \sin(\omega t + \psi).$$

**rovnice s pravou stranou-harmonické buzení obvodu**

**stačí najít jedno partikulární řešení rovnice s pravou stranou - vezmeme harmonické**

$$y_p(t) = Y_{mp} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

**kompletní řešení je součet obecného řešení homogenní rovnice a jednoho partikulárního**

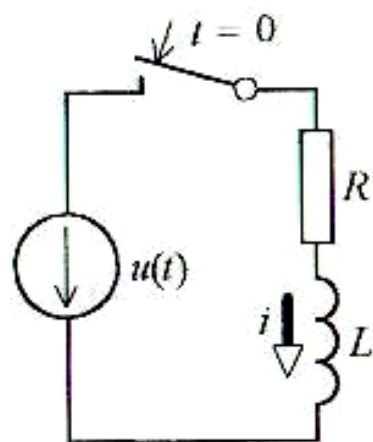
$$y(t) = K e^{-t/\tau} + y_p(t).$$

**s počátečníma podmínkami dostaneme:**

$$y(0+) = K + y_p(0+). \quad K = y(0+) - y_p(0+)$$

$$y(t) = y_p(t) + [y(0+) - y_p(0+)] e^{-t/\tau}.$$

**kompletní řešení, které bere v úvahu i přechodový děj**



$$R i + L \frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

$$i_L(0+) = i_L(0-) = 0.$$

$$i_p(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

partikulární řešení

$$R I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \omega L I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

úplné řešení:

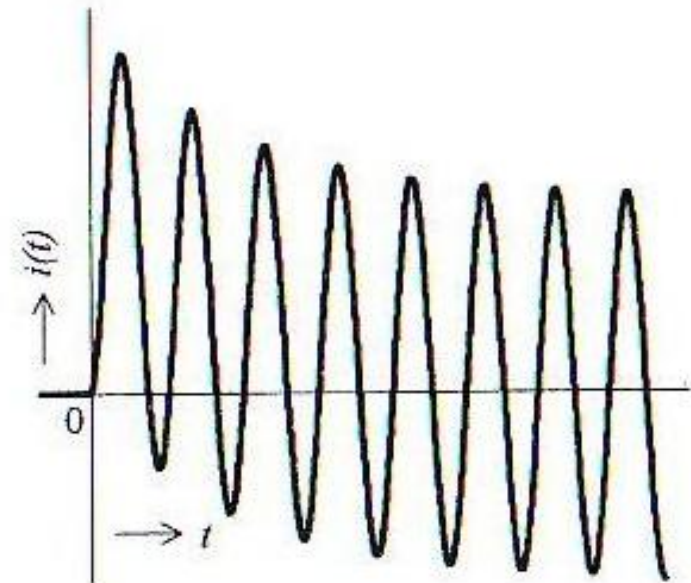
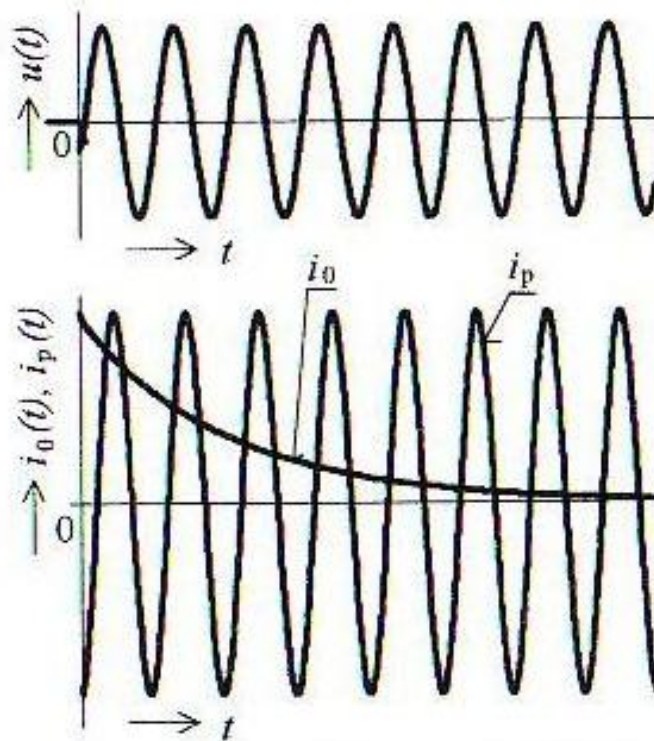
$$i(t) = K e^{-t/\tau} + I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

$$\tau = L/R$$

$$t = 0+ \longrightarrow 0 = K + I_m \sin(\psi - \varphi)$$

$$i(t) = I_m [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}].$$

$$\psi = -0.5 \quad \varphi = \pi/4$$



$$i_0(t) = I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}$$

# Ustálený stav ve vysokofrekvenčních lineárních obvodech buzených harmonickým signálem

- Obvody jsou buzeny pouze harmonickým signálem o jedné frekvenci  $\omega$ .
- Zajímá nás signál pouze v době velmi dlouhé po zapnutí zdroje.
- Všechny průběhy  $u$  a  $i$  jsou pak také harmonické o frekvenci  $\omega$ .
- Zavedeme komplexní vyjádření  $u$  a  $i$ :

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(U_m e^{j(\omega t + \varphi)})$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(I_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

$$\bar{U} = U_m e^{j\varphi} \quad \text{je komplexní amplituda napětí}$$

$$\bar{I} = I_m e^{j\phi} \quad \text{je komplexní amplituda proudu}$$

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \quad U_R(t) = RI_R(t) \quad U_L(t) = L \frac{dI_L}{dt} \quad I_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$$

$$U_R(t) = RI_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_I) = U_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$I_C(t) = \omega C U_{C,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{U_C} + \frac{\pi}{2}\right) = I_{C,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{U_C} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.16)$$

$$U_L(t) = \omega L I_{L,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{I_L} + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{I_L} + \frac{\pi}{2}\right)$$

i vyjádření vzájemné souvislosti jejich amplitud

$$U_{R,0} = RI_{R,0}, \quad U_{C,0} = \frac{I_{C,0}}{\omega C}, \quad U_{L,0} = \omega L I_{L,0}. \quad (8.17)$$

Z rovnic (8.16) je vidět, že na rozdíl od odporu mají proudy a napětí na indukčnosti a kapacitě rozdílné fázové konstanty, lišící se o  $\pm\pi/2$ :  $\varphi_{U_C} - \varphi_{I_C} = -\pi/2$ ,  $\varphi_{U_L} - \varphi_{I_L} = \pi/2$ . Vztahy (8.17) jsou konkrétním vyjádřením relace (4.50), která definuje impedanci. Pro impedanci odporu, indukčnosti a kapacity dostáváme postupně

$$Z_R = R, \quad Z_L = \omega L, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (8.18) \quad 28$$

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi)}]. \quad (8.19)$$

Okamžitou hodnotu střídavého napětí či proudu je tudíž možné vyjádřit jako reálnou část komplexních veličin

$$\hat{U}(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_U)} = \bar{U} e^{j\omega t}, \quad (8.20)$$

$$\hat{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_I)} = \bar{I} e^{j\omega t},$$

tedy

$$U(t) = \operatorname{Re} \hat{U}(t), \quad (8.21)$$

$$I(t) = \operatorname{Re} \hat{I}(t).$$

Veličinami  $\hat{U}(t)$ ,  $\hat{I}(t)$  mohou být tedy proudy a napětí v každém okamžiku reprezentovány. Je přitom zřejmé, že časově závislý člen  $\exp(j\omega t)$  nenese při zadané frekvenci o sledované veličině žádnou informaci. Stačí tedy proudy a napětí reprezentovat jejich *komplexními amplitudami*, které dle (8.20) zavádíme vztahy

$$\begin{aligned}\bar{U} &= U_0 e^{j\varphi_U}, \\ \bar{I} &= I_0 e^{j\varphi_I}.\end{aligned}\tag{8.22}$$

Po dosazení 8.21 do základních vztahů pro průběhy okamžitých veličin na kapacitě, odporu a indukčnosti dostaneme:

$$\begin{aligned}U_R(t) &= RI_R(t) & U_L(t) &= L \frac{dI_L}{dt} & I_C(t) &= C \frac{dU_C(t)}{dt} \\ \bar{U}_R &= R\bar{I}_R, & \bar{U}_L &= j\omega L\bar{I}_L, & \bar{U}_C &= \frac{\bar{I}_C}{j\omega C}.\end{aligned}\tag{8.23}$$

Tyto vztahy můžeme reprezentovat jediným obecným výrazem

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I},\tag{8.24}$$

$\bar{Z}$  značí *komplexní impedanci* příslušného prvku. Pro odpor, indukčnost a kapacitu platí postupně

$$\begin{aligned}\bar{Z}_R &= R, \\ \bar{Z}_L &= j\omega L, \\ \bar{Z}_C &= \frac{1}{j\omega C}.\end{aligned}\tag{8.25}$$

Alternativně k (8.24) lze psát

$$\bar{I} = \bar{Y}\bar{U}.\tag{8.26}$$

Veličina  $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$  se nazývá (komplexní) *admitancí* prvku. Pro admitanci odporu, indukčnosti a kapacity platí postupně

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R}, \quad \bar{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}, \quad \bar{Y}_C = j\omega C.\tag{8.27}$$

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \hat{I}_k(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \hat{I}_k(t) = 0.$$

Je-li tento vztah splněn v libovolném čase, musí být identicky rovna i imaginární část součtu, neboť hodnoty jejich jednotlivých členů v čase  $t' = t \pm \pi/2$  jsou rovny hodnotám členů reálné části v čase  $t$ . Musí tedy platit

$$\sum_{k=1}^N \hat{I}_k(t) = 0$$

a po vykrácení časového faktoru  $\exp(i\omega t)$  také

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \bar{I}_k = 0,} \quad (8.28)$$

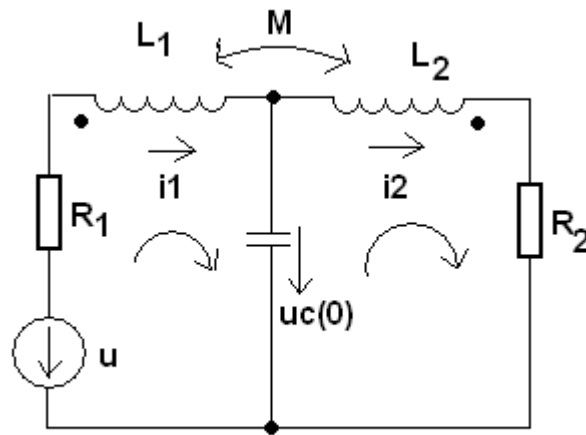
což je hledaný tvar *I. Kirchhoffova pravidla*.

$$\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} \widehat{\mathcal{E}}_k(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^M \widehat{\mathcal{E}}_k(t) = \sum_{l=1}^N \operatorname{Re} \bar{Z}_l \widehat{I}_l(t) = \operatorname{Re} \sum_{l=1}^N \bar{Z}_l \widehat{I}_l(t).$$

Obdobnou rovnici musí z důvodů, které jsme uvedli při vyšetřování I. Kirchhoffova pravidla, splňovat i imaginární část. Odtud, po zkrácení faktorem  $\exp(i\omega t)$ , dostaneme rovnici

$$\boxed{\sum_{k=1}^M \bar{\mathcal{E}}_k = \sum_{l=1}^N \bar{Z}_l \bar{I}_l}, \quad (8.29)$$

která vyjadřuje II. Kirchhoffovo pravidlo pomocí komplexních amplitud příslušných veličin.



$$-u + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) d\tau = 0$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 - u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) d\tau = 0$$

Obvodové rovnice pro komplexní amplitudy

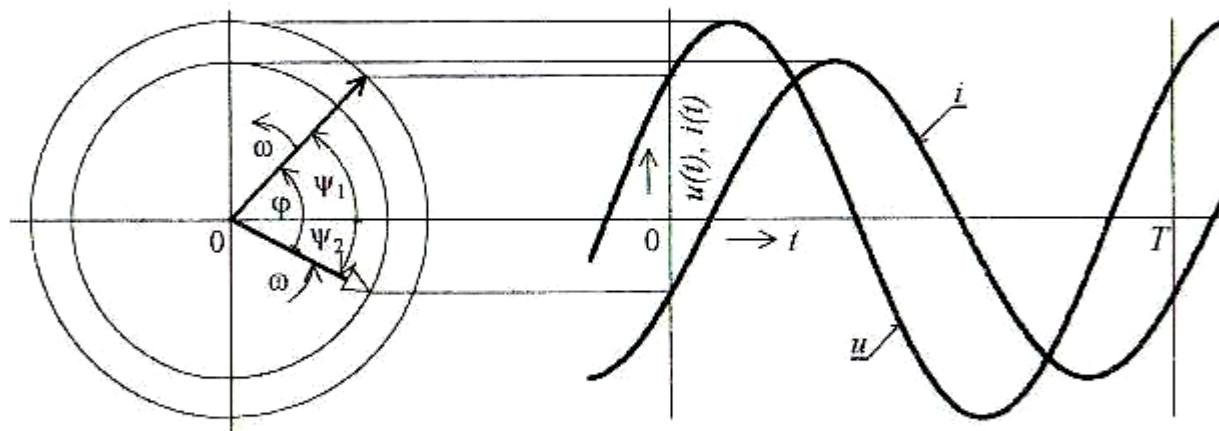
$$-U + R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 - \frac{j(I_1 - I_2)}{\omega C} = 0$$

$$j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 + R_2 I_2 - \frac{j}{\omega C} (I_2 - I_1) = 0$$

# Vyjádření harmonických průběhů harmonických veličin pomocí fázorů v komplexní rovině

$$u(t) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi_1\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_1)$$

$$i(t) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi_2\right) = I_m \sin(\omega t + \psi_2)$$



$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_1 - \pi/2) = U_m \sin(\omega t + \psi_1)$$

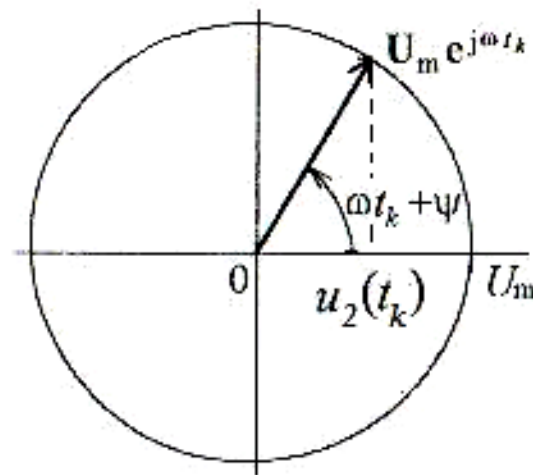
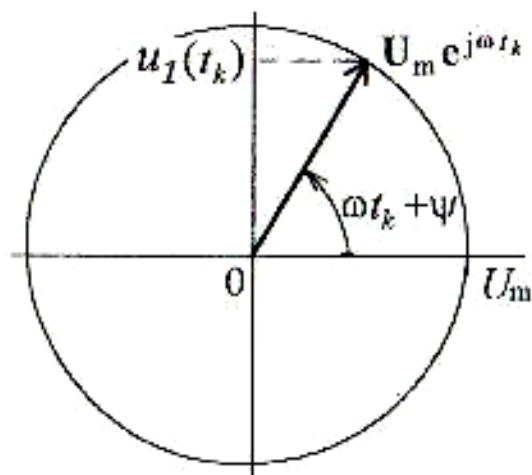
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_2 - \pi/2) = I_m \sin(\omega t + \psi_2)$$

$$U_m e^{j(\omega t + \psi)} = U_m \cos(\omega t + \psi) + j U_m \sin(\omega t + \psi) .$$

$$U_m e^{j(\omega t + \psi)} = U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \bar{U}_m e^{j\omega t}$$

$$u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} [U_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im} [U_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \text{Im} [\bar{U}_m e^{j\omega t}]$$

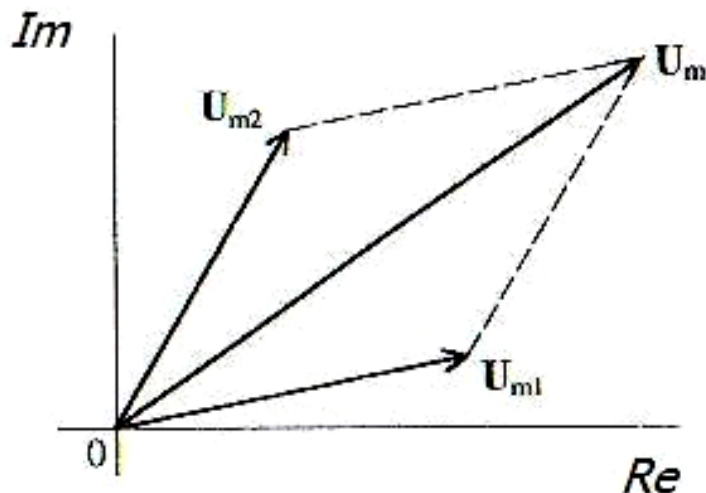
$$u_2(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = \text{Re} [U_m e^{j\omega t + \psi}] = \text{Re} [\bar{U}_m e^{j\omega t}]$$



rotující fázor v komplexní rovině

(zobrazen v čase  $t_k$ )

Elektrické veličiny vyjádřené fázory můžeme sčítat graficky i numericky (pokud mají stejnou frekvenci  $\omega$  )



$$u_1(t) = 40 \sin(1000t + 0.3)$$

$$\mathbf{U}_{m1} = 40 e^{j0.3} \text{ V}$$

$$u_2(t) = 30 \sin(1000t + 1.1)$$

$$\mathbf{U}_{m2} = 30 e^{j1.1} \text{ V}$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

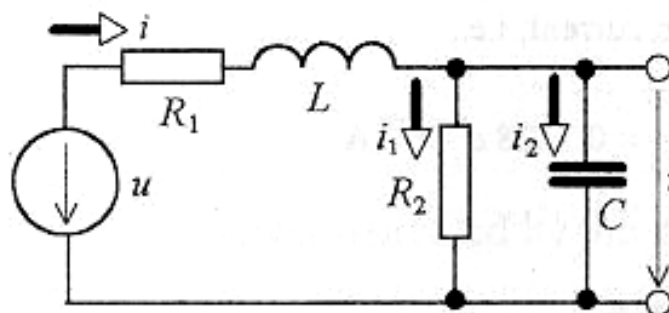
$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_{m1} + \mathbf{U}_{m2}$$

$$\mathbf{U}_{m1} = 40 \cos 0.3 + j 40 \sin 0.3 = 38.21 + j 11.82 \text{ [V]},$$

$$\mathbf{U}_{m2} = 30 \cos 1.1 + j 30 \sin 1.1 = 13.61 + j 26.74 \text{ [V]}$$

$$\mathbf{U}_m = 51.82 + j 38.56 = 64.59 e^{j0.6397} \text{ V.}$$

$$u(t) = \text{Im} [\mathbf{U}_m e^{j1000t}] = 64.59 \sin(1000t + 0.6397) \text{ [V]}$$



$$u(t) = 100 \sin(1000t + \pi/4) [\text{V}]$$

$$R_1 = 500 \Omega, R_2 = 1000 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \mu\text{F}.$$

máme určit  $u_C$   $i_1$   $i_2$

$$\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$

$$u(t) = 100 \sin(1000t + \pi/4) [\text{V}] = 100 \cos(1000t - \pi/4) [\text{V}]$$

**komplexní amplituda napětí:**  $U_m = 100 e^{-j\pi/4} \text{ V}$

**výsledná impedance  $R_1$  a  $L$  v sérii:**

$$Z_1 = R_1 + j\omega L = 500 + j1000 \cdot 1 = 500 + j1000 [\Omega],$$

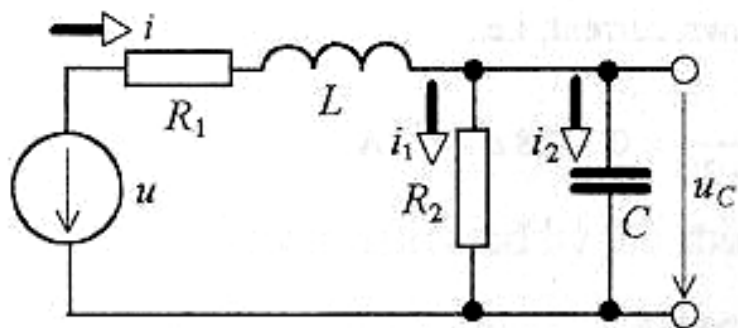
**výsledná impedance  $R_2$  a  $C$  paralelně:**

$$Z_2 = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{1000}{1 + j1000 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = \frac{1000}{1 + j} = 500(1 - j) [\Omega]$$

**výsledná impedance:**  $Z = Z_1 + Z_2 = 1000 + j500 = 1118 e^{j0.4636} \Omega.$

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = 0.08944 e^{-j1.248} \text{ A}.$$

$$i(t) = \text{Re}[0.08944 e^{-j1.248} e^{j1000t}] = 0.08944 \cos(1000t - 1.248) \text{ A}.$$



$$I_{m1} = \frac{I_m Z_2}{R_2} = \frac{I_m R_2}{1 + j\omega CR_2}$$

$$I_{m1} = I_m \frac{1}{1 + j\omega CR_2} = 0.06324 e^{-j2.033} \text{ A}$$

$$I_{m2} = \frac{I_m Z_2}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{I_m R_2}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$I_{m2} = I_m \frac{j\omega CR_2}{1 + j\omega CR_2} = 0.06324 e^{-j0.4637} \text{ A}$$

$$i_1(t) = \text{Re}[I_{m1} e^{j1000t}] = 0.06324 \cos(1000t - 2.033) \text{ A},$$

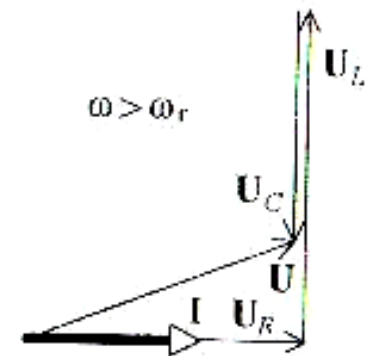
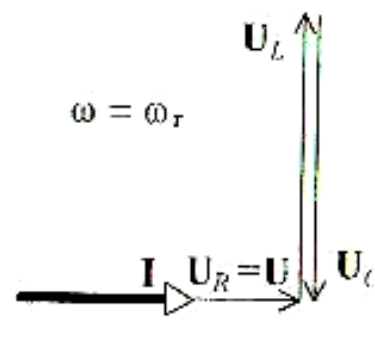
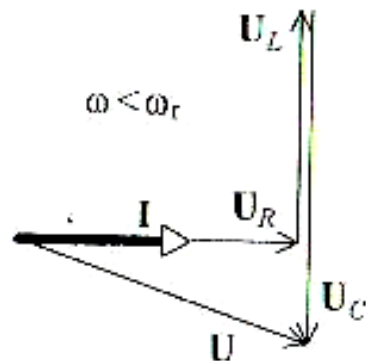
$$i_2(t) = \text{Re}[I_{m2} e^{j1000t}] = 0.06324 \cos(1000t - 0.4637) \text{ A}.$$

$u_C$  ?

# Rezonanční obvody

- V obvodech kde se kumuluje elektrická a magnetická energie se mohou tyto energie měnit jedna v druhou např. energie v induktoru a kapacitoru.
- Při dodání energie do takového obvodu mohou v něm vzniknout vlastní oscilace (bez další dodávky energie tlumené).
- Pokud bude tento obvod buzen harmonickým signálem budou všechny veličiny v obvodu mít také sinusový průběh v ustáleném stavu → vynucené oscilace.
- V těchto obvodech dochází v výměně energie mezi zdrojem a pasivní sítí obvodu, pokud tato výměna pro určitou frekvenci ustane, tak dochází k rezonanci.
- Při rezonanci je fázový posuv mezi proudem a napětím na celém obvodu nula.

# Sériový rezonanční obvod



Pro celkovou impedanci platí:  $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$  pro tuto podmínku je impedance reálná

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r. \quad - \text{ rezonanční frekvence}$$

pro  $\omega_r$  je  $Z_r = R$   $|Z_r|$  je minimální

- při rezonanci je velikost napětí na induktoru stejná jako na kapacitoru, celkové napětí na obvodu je minimální  $\Rightarrow$  napěťová rezonance

pro  $\omega_r$  platí:

$$U_{Lr} = j\omega_r L I_r = j\omega_r L \frac{U}{R} = j U \frac{\omega_r L}{R} = -U_{Cr}.$$

$$Q = \frac{U_{Lr}}{U} = \frac{U_{Cr}}{U} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}$$

Q - je činitel jakosti

- Proud obvodem v rezonanci je  $I_r = U/R$

- Potom platí: 
$$\frac{I}{I_r} = \frac{Z_r}{Z} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega_r L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(s - \frac{1}{s}\right)}$$

$$s = \omega / \omega_r$$

$s$  - relativní frekvence

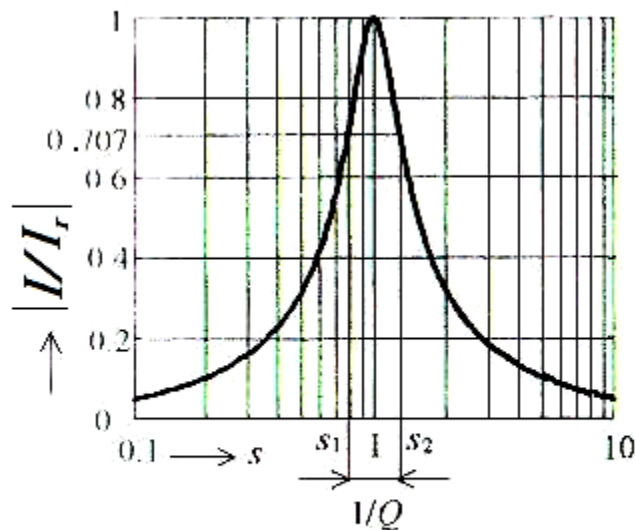
Pro  $s_1$  a  $s_2$  platí:

$$\left| \frac{I}{I_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq -3\text{dB} \quad \text{a} \quad \arg \frac{I}{I_r} = \pm \frac{\pi}{4}.$$

pro tyto hodnoty  $\frac{I}{I_r}$  platí:

$$Q\left(s_1 - \frac{1}{s_1}\right) = -1 \quad \text{a} \quad Q\left(s_2 - \frac{1}{s_2}\right) = +1.$$

$$s_1 s_2 = 1 \quad \text{a} \quad s_2 - s_1 = \frac{1}{Q}.$$



rezonanční křivka pro  $Q=2$

- Pro vyšší činitel jakosti je  $s_2 - s_1$  menší a rezonanční křivka je strmější

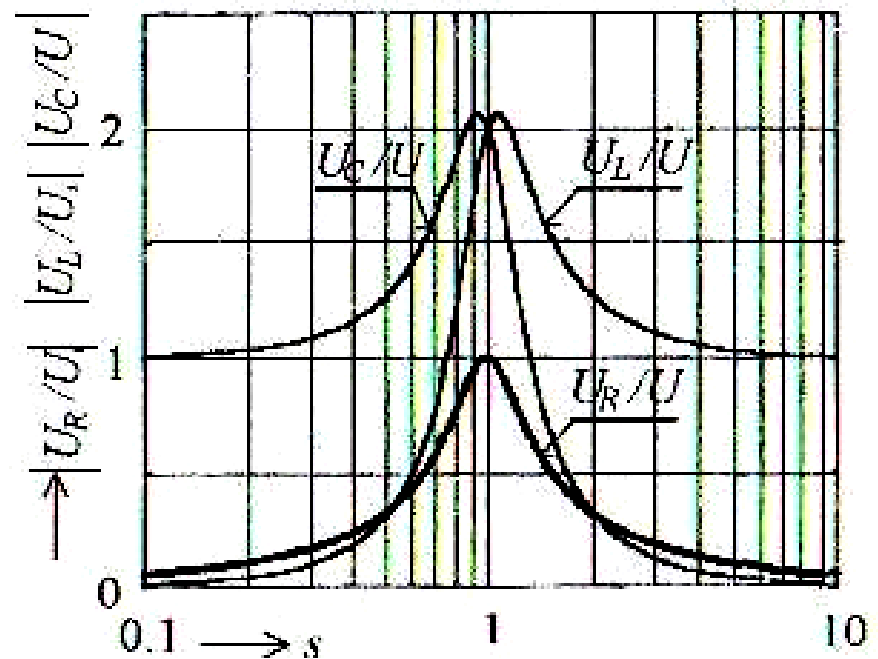
- Pro napětí na jednotlivých elementech platí:

$$\frac{U_R}{U} = \frac{R \mathbf{I}}{R \mathbf{I}_r} = \frac{1}{1 + jQ \left( s - \frac{1}{s} \right)},$$

$$\frac{U_L}{U} = \frac{j\omega L \mathbf{I}}{R \mathbf{I}_r} = \frac{j s Q}{1 + jQ \left( s - \frac{1}{s} \right)},$$

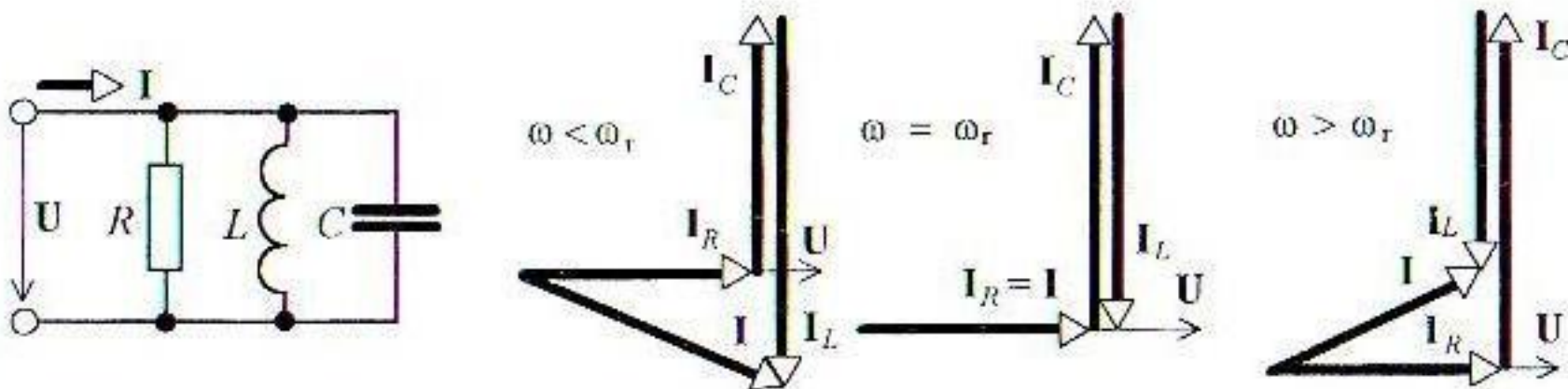
$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{j\omega C R} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{I}_r} = \frac{\frac{1}{j s} Q}{1 + jQ \left( s - \frac{1}{s} \right)}.$$

pro frekvence velmi blízké  
rezonanci se napětí na kapacitoru  
a induktoru nakmitávají nejvíc



frekvenční závislost pro  $Q=2$

# Paralelní rezonanční obvod



$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

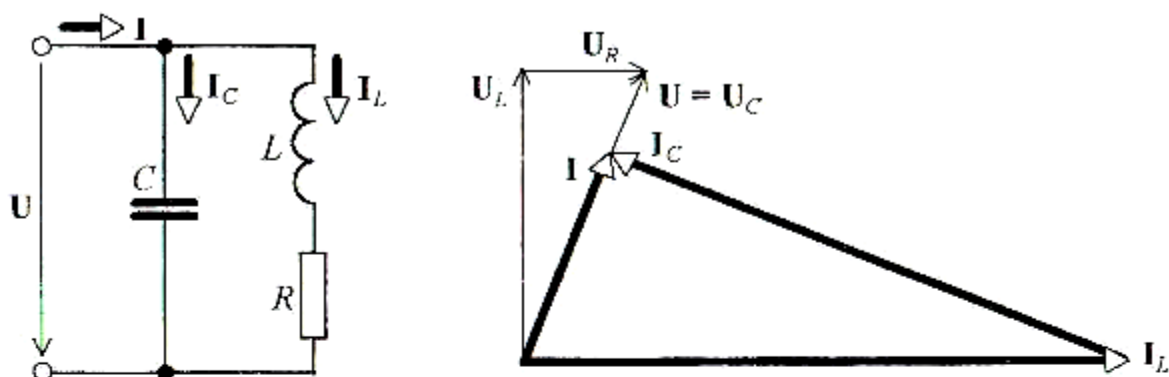
$Y$  je reálné pro  $\omega C = \frac{1}{\omega L} \rightarrow$  pro rezonanční frekvenci platí:

$$Y_r = G \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_r$$

pro činitel jakosti platí:

$$Q = \frac{I_{Cr}}{I} = \frac{I_{Lr}}{I} = \frac{\omega_r C}{G} = \frac{1}{\omega_r L G}$$

# Reálnější model paralelního rezonančního obvodu



$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

$$Y \text{ je reálná pro: } \omega C = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \longrightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

$$\text{když definujeme: } \omega_{r0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q_0 = \frac{\omega_{r0} L}{R} \quad \text{činitel jakosti}$$

$$\text{pak } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - LC \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_{r0} \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

- Obvod obsahující více indukčností a kapacit může vykazovat čistě reálnou impedanci pro více frekvencí.
- Mluvíme potom o vícenásobné rezonanci.

**zanedbáme reálné ztrátové elementy pro zjednodušení**

$$Z = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = j \frac{\omega L_1(1 - \omega^2 L_2 C) + \omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}.$$

**$Z = 0$  pro frekvenci:**

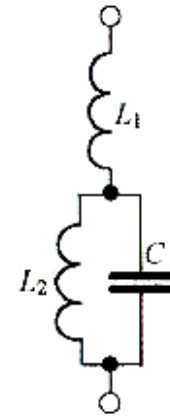
$$\omega_{r1} = \sqrt{\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1}\right) \frac{1}{C}},$$

**V tomto bodě nastává napěťová rezonance.**

$$Y = \frac{1}{Z} = -j \frac{1 - \omega^2 L_2 C}{\omega L_1(1 - \omega^2 L_2 C) + \omega L_2}$$

**$Y = 0$  pro frekvenci:**

$$\omega_{r2} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$



# Příklady

**Stanovte velikost energie nahromaděné v sériovém rezonančním obvodu při rezonanci.**

**Energie v kapacitoru a induktoru je:**  $W_r(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) + \frac{1}{2} C u_C^2(t).$

**časový průběh proudu při rezonanci je:**  $i(t) = \text{Im}[I_{mr} e^{j\omega_r t}] = I_{mr} \sin \omega_r t$

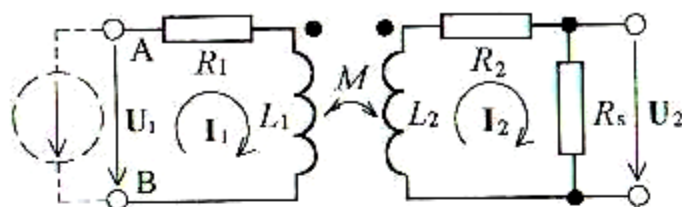
**časový průběh napětí na kapacitoru při rezonanci je:**

$$u_C(t) = \text{Im}[U_{mCr} e^{j\omega_r t}] = \text{Im}\left[\frac{1}{j\omega_r C} I_{mr} e^{j\omega_r t}\right] = -\frac{1}{\omega_r C} I_{mr} \cos \omega_r t = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_{mr} \cos \omega_r t.$$

**Pro nahromaděnou energii platí:**

$$W_r(t) = \frac{1}{2} L I_{mr}^2 \sin^2 \omega_r t + \frac{1}{2} C \frac{L}{C} I_{mr}^2 \cos^2 \omega_r t = \frac{1}{2} L I_{mr}^2.$$

**Ukazuje se, že energie je konstantní a vyměňuje se pouze mezi elementy v obvodu.**



**Example** An equivalent circuit of a transformer with loading resistor  $R_s$  is shown in Fig. Determine its input impedance  $Z_{AB}$  (the impedance between terminals A and B) and the voltage transfer function  $P = U_2 / U_1$ .

**Solution:**

The circuit equations are

$$(R_1 + j\omega L_1) \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 = U_1, \quad (R_2 + R_s + j\omega L_2) \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1 = 0.$$

Their solution results in

$$\mathbf{I}_1 = U_1 \frac{R_2 + R_s + j\omega L_2}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + R_s + j\omega L_2) - (j\omega M)^2},$$

$$\mathbf{I}_2 = U_1 \frac{j\omega M}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + R_s + j\omega L_2) - (j\omega M)^2}.$$

Hence it is easy to find

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= \frac{U_1}{\mathbf{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_s + j\omega L_2} = \\ &= R_1 + \frac{\omega^2 M^2 (R_2 + R_s)}{(R_2 + R_s)^2 + \omega^2 L_2^2} + j\omega \left( L_1 - \frac{\omega^2 M^2 L_2}{(R_2 + R_s)^2 + \omega^2 L_2^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_s \mathbf{I}_2}{U_1} = \frac{j\omega M R_s}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + R_s + j\omega L_2) - (j\omega M)^2} = \\ &= \frac{j\omega M R_s}{(j\omega)^2 (L_1 L_2 - M^2) + j\omega [L_1 (R_2 + R_s) + L_2 R_1] + R_1 (R_2 + R_s)}. \end{aligned}$$