

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA



ZÁKLADY FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Datum:

Provedl:

Obor:

Hodnocení:

1. Úkoly:

- 1.1. Zjistěte pro dané těleso moment setrvačnosti, prochází-li osa těžištěm
- 1.2. Zjistěte moment setrvačnosti daného tělesa k dané ose metodou torzních kmitů

2. Seznam pomůcek:

- kovový disk s neznámým momentem setrvačnosti
- kovový disk se známým momentem setrvačnosti, ocelová struna
- stopky, váhy, mikrometr a posuvné měřítko

3. Teorie

Kinetická energie tělesa, které se otáčí kolem osy s úhlovou rychlostí ω , přičemž jednotlivé elementy hmotnosti m_i , které jsou vzdáleny od osy r_i , mají rychlost $v_i = \omega \cdot r_i$ je

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot J \quad (3.1.)$$

kde $J = \sum m_i \cdot r_i^2$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení.

Moment setrvačnosti tuhého tělesa je obecně symetrický tenzor, popisující setrvačné vlastnosti tělesa při rotaci kolem libovolné osy. Pro konkrétně zvolenou osu rotace je moment setrvačnosti skalárem, definovaný vztahem:

$$J = \int r^2 dm \quad (3.2)$$

kde dm je element hmotnosti tělesa,

r je vzdálenost elementu hmotnosti od osy rotace.

Z definice hustoty ρ lze určit element hmotnosti jako $dm = \rho dV$

kde dV je objemový element tělesa. Pak můžeme tady psát:

$$J = \iiint_V \rho r^2 dV \quad (3.3.)$$

kde r je vzdálenost od osy otáčení.

Moment setrvačnosti závisí na poloze osy otáčení, nejmenší je pro osu procházející těžištěm.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm lze vypočítat pomocí Steinovy věty:

$$J = J_o + Ma^2 \quad (3.4)$$

kde J_o je moment setrvačnosti tělesa pro osu procházející těžištěm,

M je hmotnost tělesa,

a je vzdálenost obou rovnoběžných os.

Jednotka momentu setrvačnosti $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Poloměr setrvačnosti R_s tělesa je definován jako vzdálenost od osy rotace, v níž by musela být soustředěna veškerá hmotnost tělesa m , aby moment setrvačnosti byl jako při daném rozložení hmoty. Pro moment setrvačnosti můžeme tedy psát $J = m R_s^2$ a po upravení

$$R_s = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (3.5)$$

Jednotka poloměru setrvačnosti je $[R_s] = \text{m}$.

3.1. Výpočet momentu setrvačnosti různých těles

U pravidelných homogenních těles lze pomocí vztahu (3.3) a (3.4) určit jejich moment setrvačnosti J přímo výpočtem na základě změřených parametrů tělesa. Například pro tenkou tyč délky l , kde je osa jsoucí středem tyče kolmá na její délku je $J = 1/12 Ml^2$, pro kouli o poloměru R je $J = 2/5 MR^2$. Pro kruhový disk, kde je osa kolmá na plochu se vypočítá $J = 1/2 MR^2$. Pro kruhovou desku o tloušťce l s otvorem uprostřed můžeme pro objemový element psát: $dV = 2\pi r l dr$. Dosazením do (3.3) a integrací v mezích R_1, R_2 dostáváme vztah:

$$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) \quad (3.1.1)$$

kde R_2 je vnější poloměr,

R_1 je vnitřní poloměr a

m je hmotnost disku.

3.1.1. Postup měření

- 1) Posuvným měřítkem změříme potřebné hodnoty (poloměry) tělesa (disk s otvorem uprostřed), pro každý rozměr alespoň desetkrát.
- 2) Vážením určíme hmotnost zkoumaného tělesa.
- 3) Hodnoty zapisujeme do předem připravené tabulky.
- 4) Z naměřených hodnot vypočítáme průměrné hodnoty a jejich odchylky.
- 5) Dosazením do vzorce (3.1.1) vypočítáme pro všechny hodnoty daný moment setrvačnosti.
- 6) Výsledky uvedeme ve tvaru $X = \bar{X} \pm v(X)$.

3.2. Stanovení momentu setrvačnosti tělesa pomocí torzních kmitů

Pro periodu torzních kmitů T platí:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (3.2.1)$$

kde J je moment setrvačnosti kmitajícího tělesa,

D je direkční moment torzního závěsu.

Direkční moment je moment silové dvojice, který pootočí torzní závěs o jeden radián.

Kmitá-li pouze unášecí disk (kotouč) s momentem setrvačnosti J_0 , je perioda torzních kmitů

$$T_0 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_0}{D}} \quad (3.2.2)$$

Přidáme-li měřený disk s neznámým momentem setrvačnosti J , bude perioda torzních kmitů

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{D}} \quad (3.2.3)$$

Ze vztahu (3.2.2) a (3.2.3) lze určit hledaný moment setrvačnosti J a to podle vztahu:

$$J = J_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2} \quad (3.2.4)$$

Měření momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů tedy spočívá jednak ve stanovení doby kmitu T_0 , kterou vykoná samotný unášecí kotouč, a doby kmitu T , kterou vykonává zkoumané těleso spojené s unášecím kotoučem. Za předpokladu znalosti momentu setrvačnosti J_0 unášecího kotouče lze vypočítat hledaný moment setrvačnosti J .

Měření momentu setrvačnosti z torzních kmitů lze provádět také tak, že nejprve necháme torzně kmitat těleso s neznámým momentem setrvačnosti J a změříme dobu kmitu T , pro kterou platí vztah (3.2.1). Potom k tělesu neznámého momentu setrvačnosti J přidáme těleso známého momentu setrvačnosti J_1 symetricky rozložené kolem osy torzního kyvadla a změříme dobu kmitu T_1 , pro niž platí vztah:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{J_1 + J}{D}} \quad (3.2.5)$$

Přidané těleso má tvar disku s otvorem uprostřed symetricky rozloženého kolem torzní osy. Z rovnic (3.2.1) a (3.2.5) plyne vztah pro výpočet neznámého momentu setrvačnosti:

$$J = J_1 \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} \quad (3.2.6)$$

3.2.1. Postup měření

- 1) Postupnou metodou určíme T unášecího kotouče neznámého momentu setrvačnosti.
- 2) Na torzní kyvadlo umístíme souměrně k ose drátu těleso se známým momentem setrvačnosti (z předešlého měření) a určíme dobu T_1 .
(pro přesné měření určujeme dobu jednoho kmitu z času pro deset)
- 3) Výsledky měření periody zapisujeme do předem připravené tabulky.
- 4) Vypočteme měřený moment setrvačnosti podle vzorce (3.2.6) a odchylky.
- 5) Výsledky uvedeme ve tvaru $X = \bar{X} \pm v(X)$.

4. Přehled výsledků

4.1. Tabulka hodnot pro kruhový disk s otvorem uprostřed

č.m. / vel.	R_1 [mm]	R_2 [mm]	m [kg]	v (m) [kg]	J [kg.m ²]
1	27,1	124,5	4,96	0,01	4,03
2	26,9	125,2			4,07
3	27,0	125,0	R_1 [mm]	$v(R_1)$ [mm]	4,06
4	27,0	125,0	26,83	0,05	4,06
5	27,0	124,8			4,04
6	26,6	125,0	R_2 [mm]	$v(R_2)$ [mm]	4,05
7	26,8	124,6	124,87	0,04	4,03
8	26,6	124,8			4,04
9	26,9	125,0	J [kg.m ²]	$v(J)$ [kg.m ²]	4,05
10	26,4	124,8	4,05	0,01	4,04

4.2. Tabulka hodnot pro kruhový disk určený pomocí torzních kmitů.

č.m. / vel.	t [s]	t_1 [s]	T [s]	T_1 [s]	J_1 [kg.m ²]
1	55,82	89,56	5,58	8,96	2,57
2	55,76	89,73	5,58	8,97	2,54
3	55,86	89,64	5,59	8,96	2,57
4	55,81	89,47	5,58	8,95	2,58
5	55,93	89,90	5,59	8,99	2,55
6	55,77	89,73	5,58	8,97	2,55
7	55,69	89,56	5,57	8,96	2,55
8	55,89	89,72	5,59	8,97	2,57
9	55,06	89,52	5,51	8,95	2,46
10	55,99	89,91	5,60	8,99	2,56

T [s]	5,58	$v(T)$ [s]	0,01
T_1 [s]	8,97	$v(T_1)$ [s]	0,00
J_1 [kg.m ²]	2,55	$v(J_1)$ [kg.m ²]	0,01

5. Diskuse

Při určování vnitřního a vnějšího poloměru disku s otvorem jsme nemohli měřit posuvným měřítkem průměr a následně dělit dvěma, protože rozsah posuvného měřítka nebyl dostačující. Protože by to bylo nepřesné, nechtěli jsme měřit metrem. Měřili jsme tedy vnitřní průměr otvoru disku a hodnotu $R_2 - R_1$, z které jsme vypočítali potřebné poloměry.

Pro změření jednoho kmitu tělesa na torzním kyvadle jsme určovali z času pro deset kmitů. Proto došlo ke značnému zpřesnění této hodnoty. Naopak dobu pro jeden kmit jsme pozorovali pomocí rysky na měřeném tělese a na pomocném podstavci umístěném těsně u tělesa. Proto mohlo dojít naopak k zneřádnění této hodnoty, protože jsme nemohli přesně určit souslednost rysek.

7. Závěr

Byli změřeny následující hodnoty:

Moment setrvačnosti disku o otvorem:

$$J = (4,05 \pm 0,01) \text{ kg.m}^2$$

Moment setrvačnosti disku pomocí torzních kmitů: $J_1 = (2,55 \pm 0,01) \text{ kg.m}^2$

8. Seznam literatury

[1] Stach, V., Špulák F.,: Fyzikální praktikum I, scriptum. JČU PF ČB 2002

9. Přílohy

9.1. Šmírák s naměřenými hodnotami

č.m. / vel.	R_1 [mm]
1	128
2	128
3	129
4	128
5	128
6	128
7	128
8	128
9	128
10	128

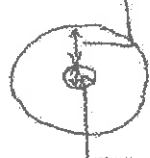
m, [kg]
4,34
5,03
$J_1 = \frac{1}{2} m \cdot R^2$
J_2 [kg.m ²]

č.m. / vel.	ΔR_2 [mm]
1	12,45
2	12,52
3	12,59
4	12,50
5	12,48
6	12,60
7	12,41
8	12,48
9	12,50
10	12,48

m, [kg]
4,96
$J_2 = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$
J_2 [kg.m ²]

č.m. / vel.	t_1 [s]	t_2 [s]	T_1 [s]
1	55,88	129,56	
2	55,38	129,73	
3	55,86	129,69	
4	55,87	129,47	
5	55,43	129,50	
6	55,75	129,72	
7	55,69	129,56	
8	55,89	129,72	
9	56,06	129,72	
10	55,99	129,72	

T [s]



č.m.	R_2
1	2,71
2	2,69
3	2,70
4	2,70
5	2,70
6	2,66
7	2,68
8	2,66
9	2,69
10	2,64

11.5.2005
Špulák